关于 F. Smarandache函数的一个方程

段卫国[1,2]

(1. 西北大学 数学系, 陕西 西安 710069; 2. 渭南师范学院 数学与信息科学系, 陕西 渭南 714000)

摘　要: 对于正整数 n, 著名的 F. Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 m, 使得 $n|m!$。本文采用初等方法证明了方程 $S(n)^h+S(n)=kn$, 在 k为任意的正整数, h为大于等于 2的时候, 有无限个正整数解, 并给出了解的形式。

关键词: F. Smarandache函数; 方程; 正整数解。

中图分类号: O156　　文献标识码: A　　文章编号: 1004-602X(2009)03-0006-02

对于任意正整数 n, 著名的 F. Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 m, 使得 $n|m!$。即就是 $S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$。在此之前, 许多学者对 $S(n)$的研究得到了很多有趣的结果。比如, 在文献[1]中, Charles Ashbacher提出了三个未解决的问题:

问题 1: 是否有有限个解满足 $S(n)^2+S(n)=kn$?

问题 2: 是否存在正整数 k使得没有正整数 n满足 $S(n)^2+S(n)=kn$?

问题 3: 是否存在最大的正整数 k使得存在正整数 n满足 $S(n)^2+S(n)=kn$?

在文献[2]中, 刘燕妮等利用初等方法给出并完全解决了这 3个问题。即就是给出下面的结论:

对于任意的正整数 k, 方程 $S(n)^2+S(n)=kn$有无限个正整数解, 且每个解 n都形如 $n=pn_1$, 其中 $p=kn_1-1$是素数。

对于这样的问题我们不禁要问它的普遍现象又如何? 因此我们对这个问题的普遍现象进行研究, 即要研究下面的问题:

问题 1: 对于任意的正整数 k和 $h\geq 2$, 方程 $S(n)^h+S(n)=kn$是否有有限个解?

问题 2: 在方程 $S(n)^h+S(n)=kn$中是否存在正整数 k使得没有正整数 n满足方程?

问题 3: 在方程 $S(n)^h+S(n)=kn$中是否存在最大的正整数 k使得存在正整数 n满足方程?

1　相关引理及结论

引理 1[3]　若 $k>0$并且 $(k, h)=1$, 则在数列 $nk+h$, $n=0, 1, 2, \cdots$, 中存在无限个素数。

引理 2[4]　设 p是素数, 则对任意正整数 k, 我们有 $S(p^k)\leq kp$, 当 $k\leq p$时, 则有 $S(p^k)=kp$。

定理　对于任意的正整数 k和 $h\geq 2$, 方程

$$S(n)^h+S(n)=kn \tag{1}$$

有无限个正整数解, 且每个解 n都形如 $n=pn_1$, 其中 $p=\sqrt[h-1]{kn_1-1}$是素数。

显然, 这个定理完全解决了我们提出的这 3个问题。即就是: 对于任意的正整数 k和 $h>2$, 存在无限个正整数 n满足方程 $S(n)^h+S(n)=kn$。因此, 不存在最大的正整数 k使得方程(1)是正整数。

2　定理的证明

事实上, 根据函数 $S(n)$的定义有 $p^\alpha | n$, 使得

$$S(n)=S(p^\alpha)=mp,$$

其中 m是正整数, 由引理 2知 $m\leq\alpha$。

设 $n=p^\alpha n_1$, 其中 $(p, n_1)=1$。

当 $\alpha=2$时, 由 $h\geq 2$有:

收稿日期: 2009-04-26

作者简介: 段卫国(1981—), 男, 陕西临潼人, 渭南师范学院讲师, 西北大学硕士研究生。

$m^h p^{h\beta}+mp^\beta=kp^\beta n_1$,

于是 $p^\beta \mid m^h p^{h\beta}+mp^\beta$,因为 $p^\beta \mid m^h p^{h\beta}$, $p^\beta \mid mp^\beta$,所以 $p \mid m$。即就是 $p\leqslant m\leqslant \alpha$。

当 $\alpha=3$时,由 $h\geqslant 2$同样有

$m^h p^{h\beta}+mp^\beta=kp^\beta n_1$,

于是 $p^\beta \mid m^h p^{h\beta}+mp^\beta$,因为 $p^\beta \mid m^h p^{h\beta}$, $p^\beta \mid mp^\beta$,所以 $p^2 \mid m$。即就是 $p^2\leqslant m\leqslant \alpha$。

依次类推,一定存在最大的正整数 u,使得 $p^u \mid m$,则 m是有限大的正整数,事实上这是矛盾的。

因此,令 $\alpha=1$, $m=1$,则

$p^h+p=kpn_1$

可以得到 $p=\sqrt[h-1]{kn_1-1}$。此时,由引理 1可知,存在无限多个这样的素数 p,故方程(1)有无限个正整数解 $n=pn_1=n_1\sqrt[h-1]{kn_1-1}$。这样的 p总是存在的,它与 h有关。当 $h=2$时, $p=kn_1-1$,此时的结果就是文献[2]中,刘燕妮等所得到的结果。这样就完成定理的证明。

参考文献:

[1] Charles Ashbacher. Unsolved problem[J]. Smarandache Notions Journal, 1998, 9(1-2-3): 152-155.

[2] 刘燕妮, 李玲, 刘宝利. Smarandache未解决的问题及其新进展[M]. High American Press, 2008: 12-13.

[3] Apostol Tom M. Introduction to analytic number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[4] Mark F, Patrick M. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002(13): 37-42.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1998.

[6] Smarandache F. Only problem not solution[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[责任编辑　贺小林]

On an Equation of the F. Smarandache Function

DUAN Wei-guo[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xian 710069, China; 2. Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan 714000, China)

Abstract: For a positive integer, a well-known F. Smarandache function is defined as the smallest positive integer. In this paper, the primary method to prove the equation, for any positive integer, and for any positive integer greater than or equal to 2, there is an unlimited positive integer solution, and are given in the form of understanding.

Keywords: F. Smarandache function; equation; positive integer

(上接第 5页)

Formulas of T(7, n) for LCM Ratio Sequence

CAO NAN, GAO LI

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China)

Abstract: Using properties of greatest common divisor and least common multiple, the general formulas of T(7, n) is given for LCM ratio sequence.

Key words: greatest common divisor; least common multiple; LCM ratio sequence