关于 F. Smarandache 函数的一个猜想

李　玲, 郝　军, 段　瑞
(陕西工业职业技术学院, 陕西咸阳　712000)

[摘　要] 本文利用初等及解析方法研究 F. Smarandache 函数对数均值的渐近性质, 解决了 F. Luca 教授提出的猜想, 给出了 F. Smarandache 函数对数均值的一个较强的渐近公式。

[关键词] F. Smarandache 函数; 对数均值; 初等及解析方法; 渐近公式
[中图分类号] O156. 4　　[文献标识码] A　　[文章编号] 1008－178X(2011)04－0011－02

0　引言

对任意正整数 n, 著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$. 例如 $S(n)$ 的前几个值 $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=10$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $\cdots$. 关于 $S(n)$ 的简单算术性质, 文献[1] 中有详细的阐述, 这里不再重复. 关于 $S(n)$ 的更深刻性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果, 例如 F. Luca 教授在文献[2] 中讨论了函数 $A(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\le x}S(n)$ 的上下界估计问题, 给出了 $A(x)$ 的一个较强的上界估计. 同时他还在文献[3] 中证明了级数 $\sum_{n\ge 1}\frac{n^a}{S(1)\cdot S(2)\cdots S(n)}$ 是绝对收敛的, 并提出了下面的猜测:

对任意实数 $x\ge 1$, 有渐近公式 $LS(x)\equiv\frac{1}{x}\sum_{n\le x}LnS(n)=\ln x-\ln\ln x+O(1)$.

关于这一猜想, 至今似乎没有人研究, 至少在现有的文献中我们还没看到有关结论. 文献[3] 的作者 F. Luca 教授认为有可能证明 $\ln x-\ln\ln x$ 是 $LS(x)$ 的上界, 但是很难证明 $LS(x)$ 的下界. 这一问题是有意义的, 至少可以反映出 $S(n)$ 函数的对数均值分布性质. 为此, 作者对这一问题, 利用初等及解析方法进行研究, 得出了截然不同的结论, 提出如下定理.

定理　对于任意实数 $x\ge 1$, 有渐近公式 $LS(x)\equiv\frac{1}{x}\sum_{n\le x}LnS(n)=\ln x+O(1)$.

显然我们的定理不仅说明文献[3] 中的猜测是错误的, 也就是说第二个主项 $\ln\ln x$ 是不存在的, 同时也给出了 $LS(x)$ 的正确表示形式. 当然如果利用素数分布中的深刻结果, 我们还可以得到更精确的渐近公式, 也就是对任意正整数 $k\ge 1$, 有 $LS(x)\equiv\frac{1}{x}\sum_{n\le x}LnS(n)=\ln x+C+O\left(\frac{1}{\ln^k x}\right)$, 其中 C 为可计算的常数.

1　定理的证明

为了完成定理的证明, 我们需要下面的简单引理.

引理　对任意素数 p, 有渐近公式 $\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1)$, $\sum_{p\le x}\ln p=x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$.

[收稿日期] 2011－06－05
[基金项目] 陕西省教育厅计划科研项目 (09JK336); 陕西工业职业技术学院科研项目 (ZK08－004)。
[作者简介] 李　玲 (1977－), 女, 陕西商南人, 陕西工业职业技术学院讲师, 硕士, 从事基础数学研究。

证明：参阅文献[4—6]，利用引理直接给出定理的证明. 首先给出 $LS(x)$ 的上界估计. 事实上由 $S(n)$ 的初等性质知对任意正整数 n 有 $S(n)\leq n$，所以由 Euler 求和公式(文献[6]中定理 3.1)，我们有

$$LS(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\ln S(n)\leq\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\ln n=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\int_1^x \ln n dy\leq\frac{1}{x}\int_1^x \ln y dy+\frac{\ln(x+1)}{x}=\ln x-1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

即 $LS(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\ln S(n)\leq\ln x+O(1)$. (1)

其次，利用上面的引理估计 $S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}LnS(n)$ 的下界的下界. 对任意正整数 $n>1$，显然 n 至少有一个素因子 p，不妨设 $n=p\circ n_1$ 于是由 $S(n)$ 的性质知 $S(n)\geq p$，$LnS(n)=LnS(p\circ n_1)\geq\ln p$.

从而由熟知的分拆恒等(参阅文献[6]定理 3.17)，我们有

$$\begin{aligned}
LS(x)&=\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\ln S(n)\\
&\geq\frac{1}{x}\sum_{pn_1\leq x}\ln p\\
&=\frac{1}{x}\left\{\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\circ\sum_{n\leq\frac{x}{p}}1+\sum_{n\leq\sqrt{x}}1\circ\sum_{p\leq\frac{x}{n}}\ln p-\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\circ\sum_{n\leq\sqrt{x}}1\right\}\\
&=\frac{1}{x}\left\{\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\circ\left[\frac{x}{p}+O(1)\right]+\sum_{n\leq\sqrt{x}}1\circ\left[\frac{x}{n}+O\left(\frac{x}{n\ln x}\right)\right]-\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\circ\left[\sqrt{x}+O(1)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{x}\left\{x\circ\sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p}+O\left(\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p\right)+x\circ\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n}+O(x)-\sqrt{x}\circ\sum_{p\leq\sqrt{x}}\ln p+O(\sqrt{x})\right\}\\
&=\frac{1}{x}\left\{x\circ\ln\sqrt{x}+O(\sqrt{x})+x\ln\sqrt{x}+O(x)-\sqrt{x}\left[\sqrt{x}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right)\right]\right\}\\
&=\ln\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}+O(1)\\
&=\ln x+O(1).
\end{aligned}$$

即 $Ls(x)\geq\ln x+O(1)$. (2)

由式(1)及(2)有 $Ls(x)=\ln x+O(1)$，于是完成定理的证明.

[参 考 文 献]

[1] Dumitrescu V. Seleacu. The Smarandache function[M]. Erhus University press, 1996.

[2] Florian Luca. The average Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2001(12), No. 1—2—3, 19—27. 3.

[3] Florian Luca. On a series involving S(1)°S(2)°°°S(n)[J]. Smarandache Notions Journal, 1999(10), No. 1—2—3: 128—129.

[4] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[6] Tom M. Apostol. Introduction to analytical number theory[M]. New York: Spring—Verlag, 1976.

On a Conjecture of F. Smarandache Function

LI Ling, HAO Jun, DUAN Rui

(Shanxi Polytechnic Institute, Xianyang 712000, China)

Abstract: This paper studied the asymptotic properties of logarithmic mean value of F. Smarandache function with elementary and analytic methods, solved the conjecture put forward by Professor F. Luca, and proposes a stronger asymptotic formula of logarithmic mean value of the F. Smarandache function.

Key words: Smarandache function; logarithmic mean value; elementary and analytic methods; asymptotic formula