DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2009.03.004

第 27卷 第 3期 江 西 科 学 Vol.27 No.3
2009年 6月 JIANGXI SCIENCE Jun.2009

文章编号:1001-3679(2009)03-0337-02

关于 F.Smarandache函数的一个问题

朱 敏 慧

(西安工程大学理学院,陕西 西安 710048)

摘要:利用解析的方法研究 F.Smarandache函数与除数函数的混合均值,得出了 2个较为精确的渐近公式。

关键词:F.Smarandache函数;均值;渐近公式。
中图分类号:O156.4 文献标识码:A

On A Problem of F.Smarandache

ZHU Min-hui

(School of Science,Xi'an Polytechnic University,Shanxi Xi'an 710048 PRC)

Abstract:The main purpose of this paper using the analytic method to study the mixture mean value of the F.Smarandace function and the divisor function.Two sharp asymptotic formulas are obtained.

Key words:F.Smarandache function;Mean value;Asymptotic formula

1 引言及结论

1993年,罗马尼亚数论专家 F.Smarandache[1]提出了 105个尚未解决的数论问题,其中大部分问题是与正整数 n或素数 p有关的。文献[1]中第 42个问题为阶乘部分数列,定义如下。

定义 1:设 n为正整数,Smarandache简单函数定义为:满足 $p^n\mid m!!$的最小正整数 $m\in N^+$。即 $S_p(n)=\min\{m\mid p^n\mid m!!,m\in N^+\}$,在文献[2]中,Jozsef Sandor提出 Smarandache简单函数的加法类似如下。

定义 2:设 $S_p(x)=\min\{m\in N^+:p^x\leq m!!\}$,$x\in(1,\infty)$,和 $S_p^*(x)=\max\{m\in N^+:m!!\leq p^x\}$,$x\in(1,\infty)$,则称 $S_p(x)$和 $S_p^*(x)$为 Smarandache简单函数的加法类似。

很显然,若 $(m-2)!!<x\leq m!!$,$S_p(x)=m$,其中的 $m>2$。关于 $S_p(x)$的性质,许多学者都进行过研究[3,4]。但是,关于 $d(S_p(x))$的均值性质,还没有看到相关的研究,其中 $d(n)$是狄立克莱除数函数。本文用解析的方法研究了 $d(S_p(x))$的均值性质,得出几个较为精确的均值公式。

定理 1:设 p为一给定的素数,对任意实数 $x\geq 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}d(S_p(n))=2x(\ln x-2\ln\ln x)+O(x\ln p)。$$

定理 2:设 p为一给定的素数,对任意实数 $x\geq 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}d(S_p^*(n))=2x(\ln x-2\ln\ln x)+O(x\ln p)。$$

2 几个引理

引理 1:对任意实数 $x\geq 1$,有

$$\sum_{n\leq x}d(n)=x\ln x+(2c-1)x+O(\sqrt{x})$$

收稿日期:2009-03-16;修订日期:2009-04-20
作者简介:朱慧敏(1977-),女,陕西富平人,讲师,主要研究领域为数论等。
基金项目:陕西省教育厅科研专项基金(07JK267)。

其中 c是欧拉常数。

引理 2 对任意实数 $x\geq 2$,有

$$\sum_{i=1}^{x}\frac{\ln i}{i}=\frac{1}{2}\ln^{2}x+A+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

其中 A是常数。

引理 1和引理 2证明见文献[5]。

3 定理的证明

由 $d(n)$的定义和 $S_p(n)$的定义,有

$$\sum_{n\leq x}d(S_p(n))=\sum_{n\leq x}\sum_{\frac{\ln(m-2)!!}{\ln p}<n\leq\frac{\ln m!!}{\ln p}}d(m)$$

当 $n\in\left(\frac{\ln(m-2)!!}{\ln p},\frac{\ln m!!}{\ln p}\right]$,有 $S_p(n)=m$。又 $n\leq x$,故 $\frac{\ln m!!}{\ln p}\leq x$,所以 $\ln m!!\leq x\ln p$。

根据欧拉和公式,得到 $\ln m!!$的主项是 $\frac{m}{2}\ln m$,并且 $\frac{m}{2}\ln m\leq x\ln p$,即 $m\ln m\leq 2x\ln p$。

若 $m>\frac{2x\ln p}{\ln^{2}x}$,则 $\ln m$接近于 $\ln x$,得到 $m\leq\frac{2x\ln p}{\ln x}$。

由上面的讨论并应用引理 1和引理 2,有

$$\sum_{n\leq x}d(S_p(n))=\sum_{n\leq x}\sum_{\frac{\ln(m-2)!!}{\ln p}<n\leq\frac{\ln m!!}{\ln p}}d(m)=$$

$$\sum_{m\leq\frac{2x\ln p}{\ln x}}\left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]d(m)+O(x\ln p)=\sum_{m\leq\frac{2x\ln p}{\ln x}}\frac{\ln m}{\ln p}d(m)+O(x\ln p)=\frac{1}{\ln p}\sum_{un\leq\frac{2x\ln p}{\ln x}}\ln un+O(x\ln p)$$

$$=\frac{2}{\ln p}\sum_{u\leq\frac{2x\ln p}{\ln x}}\ln u\sum_{n\leq\frac{2x\ln p}{u\ln x}}1+O(x\ln p)=\frac{2}{\ln p}\sum_{u\leq\frac{2x\ln p}{\ln x}}\ln u\left[\frac{2x\ln p}{u\ln x}\right]+O(x\ln p)=\frac{4x}{\ln x}\sum_{u\leq\frac{2x\ln p}{\ln x}}\frac{\ln u}{u}+O(x\ln p)=\frac{4x}{\ln x}\left(\frac{1}{2}(\ln 2+\ln x+\ln\ln p-\ln\ln x)^{2}\right)+O(x\ln p)=2x(\ln x-2\ln\ln x)+O(x\ln p)$$

这就完成了定理 1的证明。

用同样的方法,也能证明定理 2。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problem, Not Solution[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Jozsef Sandor. On additive analogue of certain arithmetic function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 128-132.

[3] Maohua Le. Some problems concerning the Smarandachr square complementary function[J]. Smarangache Notions Journal, 2004, 14: 220-222.

[4] Zhu Min-hui. The additive analogue of Smarandache simple function. Research on Smarandache problem in number theory[C]. Hexis, 2004.

[5] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

(上接第 336页)

$\alpha g_{21}(z)\ll 1$,其展宽的过程会非常地缓慢,在传输距离不是很远时,可以近似得到束宽缓慢展宽的椭圆高斯型损耗空间光孤子。当光束初始功率小于临界功率时,束宽将会按准正弦函数和准余弦函数规律作准周期性展宽振荡变化;当光束的初始输入功率大于临界功率时,由于存在损耗,随传输过程,光束功率会逐渐变小,最终会变得比临界功率更小,束宽将会从按准正弦函数和准余弦函数规律作准周期性压缩振荡变化逐步渡到按准正弦函数和准余弦函数规律作准周期性展宽振荡变化,但在此过程中不会出现一个椭圆高斯型损耗空间光孤子,这是因为要形成损耗孤子,不仅要求光束功率等于临界功率,而且还要求此时光束处于光腰输入情形。

参考文献:

[1] Snyder A W and Mitchell D J. Accessible Solitons[J]. Science, 1997, 276(5318): 1538-1541.

[2] Guo Q, Luo B, Yi F, et al. Large phase shift of nonlocal optical spatial solitons[J]. Phys. Rev. E, 2004, 69(1): 016602-1-016602-8.

[3] 王形华,郭 旗. 椭圆高斯光束在强非局域非线性介质中的传输特性[J]. 物理学报, 2005, 54(7): 3183-3188.

[4] 秦晓娟,郭 旗,胡 巍,等. 椭圆强非局域空间光孤子[J]. 物理学报, 2006, 55(3): 1237-1243.

[5] Huang Y, Guo Q, Cao J N. Optical beams in lossy nonlocal Kerr media[J]. Opt. Commun., 2006, 261: 175-180.