第 40 卷 第 2 期　内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版)　Vol. 40 No. 2
2011 年 3 月　Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition)　Mar. 2011

# 关于 F.Smarandache 函数的两个方程

袁　霞

(西北大学 数学系, 陕西 西安 710127)

摘　要: 研究包含伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 及 Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 的两个方程的可解性. 利用初等方法, 获得了这两个方程的所有正整数解, 解决了方程的可解性问题.

关键词: 伪 Smarandache 函数; Smarandache 双阶乘函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O 156.4　文献标志码: A　文章编号: 1001-8735(2011)02-0129-03

## 1　引言及结论

对任意正整数 $n$, 著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 $m$ 使得 $n \left| \frac{m(m+1)}{2} \right.$, 即 $Z(n)=\min\left\{m: m\in N, n \left| \frac{m(m+1)}{2} \right.\right\}$. 这个函数是由罗马尼亚著名数论专家 F.Smarandache 在文献 [1] 中引进的. 关于函数 $Z(n)$ 的算数性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果[2-7]. 例如:

(1) 对于任意正整数 $n$, $Z(n)<n$ 不恒成立.

(2) 对任意素数 $p\geqslant 3$, $Z(p)=p-1$.

(3) 对任意素数 $p\geqslant 3$ 及 $k\in N$, $Z(p^k)=p^k-1$. 当 $p=2$ 时, 则有 $Z(2^k)=2^{k+1}-1$.

(4) $Z(n)$ 是不可加的, 即 $Z(m+n)$ 不恒等于 $Z(m)+Z(n)$; $Z(n)$ 也不是可乘的, 即 $Z(m\circ n)$ 不恒等于 $Z(m)\circ Z(n)$.

从以上几个简单的性质可以看出, $Z(n)$ 的值分布很不规律, 关于它的性质还有待于进一步研究.

此外, F.Smarandache 还定义另外一个数论函数 $Sdf(n)$ 为 $Sdf(n)=\min\{m: m\in N, n \mid m!!\}$. 该函数称为 Smarandache 双阶乘函数, 关于它的初等性质, 也有不少学者进行了研究并得到了一些重要的结果[8-11]. 例如, $Sdf(n)$ 有一个很重要的性质, 即 $Sdf(n)$ 保持奇偶性不变, 也就是说若 $n$ 为一个奇数则 $Sdf(n)$ 也为奇数, 而若 $n$ 为一个偶数则 $Sdf(n)$ 也为偶数. 很容易发现, $Sdf(n)$ 也是一个很不规律的函数, 尤其是在 $n$ 为偶数的时候 $Sdf(n)$ 表现出很不稳定的性质.

对 $Z(n)$ 和 $Sdf(n)$ 这两个均表现出不稳定性质的函数, 能否在它们之间找出一些联系呢? 本文的主要目的就是研究了下面两个函数方程的可解性, 即求方程

$$Z(n)=Sdf(n),\quad Z(n)+1=Sdf(n)$$

的所有正整数解. 本文通过初等方法解决了这个问题, 即证明了下面的两个定理.

定理 1　对任意正整数 $n>1$, 函数方程

$$Z(n)=Sdf(n) \tag{1}$$

仅有奇数解, 且其所有解仅有 2 种形式: ① $n=45$; ② $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p$, 其中 $k\geqslant 1$, $p_1<p_2<\cdots<p_k<p$ 均为奇素数, 对 $1\leqslant i\leqslant k$, $\alpha_i\geqslant 0$ 且至少存在一个 $\alpha_i\geqslant 1$, 同时 $p+1\equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i})$.

定理 2　对任意正整数 $n>1$, 函数方程

$$Z(n)+1=Sdf(n) \tag{2}$$

仅有奇数解, 且其所有解仅有 3 种形式: ① $n=9$; ② $n=p$; ③ $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p$, 其中 $k\geqslant 1$, $p_1<p_2<$

收稿日期: 2010-09-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071194)

作者简介: 袁　霞(1986— ), 女, 云南大理人, 西北大学硕士研究生, 主要从事基础数学研究, E-mail: yuanxia11@163.com.

$\cdots < p_k < p$ 均为奇素数, 对 $1 \leqslant i \leqslant k$, $\alpha_i \geqslant 0$ 且至少存在一个 $\alpha_i \geqslant 1$, 同时 $p-1 \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$.

## 2 定理的证明

定理 1 的证明　事实上, 当 $n=1$ 时, 方程 $Z(n)=Sdf(n)$ 成立. 很容易验证, 当 $n=2,3,4,5,6,7$ 时, $Z(n)=Sdf(n)$ 不成立. 于是不妨设 $n \geqslant 8$.

首先证明方程(1) 不可能有偶数解. 设 $n=2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 $n$ 的标准分解因式.

(1) 若 $k=0$, 即 $n=2^{\alpha}$, 此时由 $Sdf(n)$ 的性质可知 $Sdf(2^{\alpha})$ 为偶数, 而 $Z(2^{\alpha})=2^{\alpha+1}-1$ 为一个奇数, 从而 $Sdf(2^{\alpha}) \neq Z(2^{\alpha})$. 故此时 $n$ 不满足方程.

(2) 若 $k \geqslant 1$, 则 $n=2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. 由 $Sdf(n)$ 保持奇偶性不变可知, 若 $Z(n)=Sdf(n)=a$, 则 $a$ 必为一偶数, 不妨设 $Z(n)=Sdf(n)=2m$, 于是由 $Z(n)$ 定义有

$$2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \mid m(2m+1). \tag{3}$$

由(3) 式可知, 必有 $2^{\alpha} \mid m$, 且对 $\forall p_i^{\alpha_i}$, 必有 $p_i^{\alpha_i} \mid m$ 或 $p_i^{\alpha_i} \mid (2m+1)$.

由 $2^{\alpha} \mid m$ 可推出

$$2^{\alpha} \mid m!!. \tag{4}$$

记 $$S_1=\{p_i^{\alpha_i} : p_i^{\alpha_i} \mid m\}, \quad S_2=\{p_j^{\alpha_j} : p_j^{\alpha_j} \mid (2m+1)\}.$$

注意到一个事实, 即 $S_2 \neq \varnothing$, 这是因为若 $S_2=\varnothing$, 则对所有 $p_i^{\alpha_i}$ 均有 $p_i^{\alpha_i} \mid m$, 又 $2^{\alpha} \mid m$, 于是由 $2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \mid \frac{(2m-1) \cdot 2m}{2}$ 可知, $Z(n) \leqslant 2m-1$, 故 $S_2 \neq \varnothing$. 于是:

(ⅰ) 若 $S_1=\varnothing$, 即 $\forall p_i^{\alpha_i}$, $p_i^{\alpha_i} \mid (2m+1)$. 若 $\max\{p_i^{\alpha_i}\} \leqslant m$, 结合(4) 式知, $Sdf(n) \leqslant m$; 若 $\max\{p_i^{\alpha_i}\} > m$, 结合(4) 式知, 对 $Sdf(n)=2s$, 必 $\exists p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \in S_2$, 使得 $p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \mid s$. 当然 $m \neq s$. 从而 $Sdf(n) \neq 2m$;

(ⅱ) 若 $S_1 \neq \varnothing$, 设 $p_i^{\alpha_i} \in S_1$, $p_j^{\alpha_j} \in S_2$. 若 $\max\{p_i^{\alpha_i}\} < \max\{p_j^{\alpha_j}\}$, 类似(ⅰ) 的分析方法可知, 无论 $\max\{p_j^{\alpha_j}\} \leqslant m$, 还是 $\max\{p_j^{\alpha_j}\} > m$, 都有 $Sdf(n) \neq 2m$. 若 $\max\{p_i^{\alpha_i}\} > \max\{p_j^{\alpha_j}\}$ 时, 可推出 $Sdf(n) \leqslant m$.

综合(ⅰ), (ⅱ) 可知, 此时 $Sdf(n) \neq Z(n)$. 这就证明了方程(1) 不可能有偶数解.

若 $n$ 为奇数, 设 $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p^{\alpha}$ 为 $n$ 的标准分解因式. 以下分 3 种情况讨论:

(1) 若 $k=0$, 即 $n=p^{\alpha}$, 此时 $Z(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$ 为偶, 而 $Sdf(n)$ 为奇, 所以 $Z(p^{\alpha}) \neq Sdf(p^{\alpha})$.

(2) 若 $k \geqslant 1$ 且 $\alpha=1$, 则 $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p$.

① 若 $\max\{p_i^{\alpha_i}\} < p$, 则由 $Sdf(n)$ 性质可知

$$Sdf(n)=Sdf(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p)=\max\{Sdf(p_1^{\alpha_1}), \cdots, Sdf(p_k^{\alpha_k}), Sdf(p)\}=p.$$

若成立 $Z(n)=Sdf(n)=p$, 则由 $Z(n)$ 定义知

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p \mid \frac{p(p+1)}{2}.$$

于是必须成立 $p_i^{\alpha_i} \mid (p+1)$, 即 $p+1 \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$.

另一方面, 我们证明只要满足 $p+1 \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$, 就有 $Z(n)=p$. 对 $\forall h < p$,

(ⅰ) 若 $h < p-1$, 则由 $p \nmid \frac{h(h+1)}{2}$ 知, $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p \nmid \frac{h(h+1)}{2}$, 故 $Z(n) \neq h$;

(ⅱ) 若 $h=p-1$, 则由 $p_i^{\alpha_i} \mid (p+1)$ 及 $(p-1, p+1)=2$ 知, $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p \nmid \frac{(p-1)p}{2}$, 故 $Z(n) \neq p-1$.

从而我们知道, 若 $p+1 \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$, 则有 $Z(n)=Sdf(n)$, 这即是方程(1) 的一组解.

② 若 $\max\{p_i^{\alpha_i}\} > p$, 则此时 $Sdf(n)=p$ 或 $Sdf(n)=\max\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(p_j^{\alpha_j})$.

(ⅰ) 若 $Sdf(n)=p$, 则由 $\max\{p_i^{\alpha_i}\} > p$ 知, $\max\{p_i^{\alpha_i}\} \nmid \frac{p(p+1)}{2}$, 故 $Z(n) \neq p$, 从而 $Z(n) \neq Sdf(n)$.

(ⅱ) 若 $Sdf(n)=\max\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(p_j^{\alpha_j})$, 由 $Sdf(n)$ 的性质知, 必有 $p_j \mid Sdf(p_j^{\alpha_j})$, 于是 $p_j \mid Sdf(n)$.

首先注意到一个事实, 即对任意奇素数 $p$ 及 $\alpha \geqslant 2$, 除 $p^{\alpha}=3^2$ 外, 均有 $Sdf(p^{\alpha}) < p^{\alpha}$, 因为若 $p \leqslant 2\alpha-1$, 则 $Sdf(p^{\alpha})=(2\alpha-1)p < p^{\alpha}$(除 $p^{\alpha}=3^2$ 外); 若 $p < 2\alpha-1$, 则很容易由 $p^2 \mid p^{\alpha}!!$ 知, $Sdf(p^{\alpha}) < p^{\alpha}$. 而当 $Sdf(n)=\max\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(3^2)=9$ 时, 很容易验证 $n=3^2 \times 5=45$ 为一解, 其余情况均不成立.

对于 $Sdf(n) = \max\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\} = Sdf(p_j^{\alpha_j}) < p_j^{\alpha_j}$，若成立 $Z(n) = Sdf(n) = m$，则 $m < p_j^{\alpha_j}$ 且 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p \mid \frac{m(m+1)}{2}$. 又由以上分析知，$p_j \mid m$，从而 $p_j^{\alpha_j} \mid m$，这与 $m < p_j^{\alpha_j}$ 矛盾. 故 $Z(n) \neq Sdf(n)$.

(3) 若 $k \geqslant 1$ 且 $\alpha \geqslant 2$，则 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p^{\alpha}$.

① 若 $Sdf(n) = \max\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\} = Sdf(p^{\alpha})$，由 $k \geqslant 1$ 知 $p^{\alpha} \neq 3^2$，于是 $Sdf(n) = Sdf(p^{\alpha}) = m < p^{\alpha}$. 此时由 $p \mid m$ 及 $m < p^{\alpha}$ 可推出 $p^{\alpha} \nmid \frac{m(m+1)}{2}$，知 $Z(n) \neq m$，故 $Z(n) \neq Sdf(n)$.

② 若 $Sdf(n) = \max\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\} = Sdf(p_j^{\alpha_j})$，由 $\alpha \geqslant 2$ 可知，在这种情况下 $\alpha_j \geqslant 2$ 且 $p_j^{\alpha_j} \neq 3^2$，于是 $Sdf(n) = Sdf(p_j^{\alpha_j}) = m < p_j^{\alpha_j}$. 同样，由 $p_j^{\alpha_j} \nmid \frac{m(m+1)}{2}$ 知，$Z(n) \neq m$，故 $Z(n) \neq Sdf(n)$.

于是便完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明　与定理 1 的证明方法相似，这里只给出大概过程. 由 $Z(p) = p - 1$ 及 $Sdf(p) = p$ 可知，$n = p$ 满足方程(2). 对 $n = p^k$ 的情形，$Z(p^k) + 1 = p^k - 1 + 1 = p^k$，但是除 $n = 3^2$ 外均成立 $Sdf(p^k) < p^k$，当然不可能满足方程(2). 而 $n = 3^2 = 9$ 恰好就是方程(2)的一个特殊解. 对 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p$ 的情形，也容易证明，要使 $Z(n) + 1 = Sdf(n)$ 当且仅当满足 $p - 1 \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. 其余情况均与定理 1 的证明方法类似.

## 参考文献：


[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Sandor J. On a dual of the pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 209-228.

[3] Gunarto H, Majumdar A A K. On numerical values of $Z(n)$ [R]. Proceedings of the fifth international conference on number theory and Smarandache notions, 2009.

[4] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题 [J]. 西北大学学报, 2008, 38(2): 173-175.

[5] 闫晓霞. 一个包含伪 Smarandache 函数及 Smarandache 函数的方程 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(2), 372-374.

[6] 闫晓霞. Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值 [J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2010, 39(3): 229-231.

[7] 吴欣. 关于伪 Smarandache 对偶函数的一个方程 [J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2010, 39(6): 557-559.

[8] Felice Russo. Five properties of the Smarandache double factorial function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 183-185.

[9] Maohua Le. On the Smarandache double factorial function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 209-228.

[10] Bin Cheng. An equation involving the Smarandache double actorial function and Euler function [R]. Proceedings of the fifth international conference on number theory and Smarandache notions, 2009.

[11] 刘燕妮, 李玲, 刘宝利. Smarandache 未解决的问题及其新进展 [M]. High American Press, 2008.


# Two Equations Involving the F. Smarandache Function


YUAN Xia

(*Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)



**Abstract**: To study the positive integer solutions of two equations involving the Pseudo Smarandache function $Z(n)$ and Smarandache double factorial function $Sdf(n)$, and obtained all the positive integer solutions of this two equations by using the elementary method, and solved the solvability of this two equations completely.



**Key words**: pseudo Smarandache function; Smarandache double factorial function; equation; positive integer solution

【责任编辑 陈汉忠】