第 20卷 第 3期 延安大学学报(自然科学版) Vol. 20 No. 3
2001年 9月 Journal of Yanan University (Natural Science Edition) Sept. 2001

关于 F. Smarandache的一个问题*

刘红艳[1], 苟 素[2]

(1. 西北大学 数学系,陕西 西安 710069; 2. 西安邮电学院 数学系,陕西 西安 710061)

摘 要: 设 n 是一个正整数,$a(n)$表示 n的平方补数,即 $a(n)$表示使 nk 为一完全平方数的最小正整数 k。本文的主要目的是研究 $a(n)$的均值性质,并利用初等方法给出两个有趣的渐近公式。

关键词: 补数;均值;渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2001)03-0005-02

设 n为任一正整数,$a(n)$表示使 nk为一完全平方数的最小正整数 k,例如: $a(1)=1, a(2)=2, a(4)=1,\cdots, a(12)=3,\cdots, a(p)=p, a(m^2)=1$,其中 p为素数。在文献 [2]的问题 27中, F. Smarandache教授要求我们研究数列 $\{a(n)\}$的性质,关于这一问题,我们不知道至今是否有人研究,只知道它的一些简单性质,如 $a(n)$为积性函数,且 $a(a(n))=a(n)$,以及 $a(n)=\prod_{p^\alpha \| n} p^{\frac{1}{2}(1-(-1)^\alpha)}$,其中 $p^\alpha \| n$ 表示 $p^\alpha | n$,而 $p^{\alpha+1} \nmid n$.

本文的主要目的是研究均值 $\sum_{n\leqslant x} a(n)$ 和 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)}$ 的渐近性质,并利用初等方法证明下面的

定理 1 对任一实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)=\frac{\pi^2}{30}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

定理 2 对任一实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)}=\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}\sqrt{x}+O(\ln x),$$

其中 $\zeta(s)$为 Riemann Zeta-函数。

定理的证明

为完成定理的证明,我们需要初等数论中的几个简单结论,即就是

$$|\mu(n)|=\sum_{d^2|n}\mu(d) \tag{1}$$

对任一正整数 n,则 n可唯一的表示为 $n=m^2k$,其中 $\mu(k)\neq 0$,$\mu(n)$为 Möbius函数。 (2)

现在我们利用性质 (1)及 (2)来完成定理的证明。

定理 1的证明 应用 (2)式有

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)=\sum_{m^2k\leqslant x} a(m^2k)|\mu(k)|=\sum_{m^2k\leqslant x} k|\mu(k)|$$

注意到 (1)式,即可推得

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)=\sum_{m^2k\leqslant x} k\sum_{d^2|k}\mu(d)=\sum_{m^2d^2h\leqslant x} d^2h\mu(d)=\sum_{m^2d^2\leqslant x} d^2\mu(d)\sum_{h\leqslant\frac{x}{m^2d^2}} h=$$
$$\sum_{md\leqslant\sqrt{x}} d^2\mu(d)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{m^4d^4}+O\left(\frac{x}{m^2d^2}\right)\right)=\frac{x^2}{2}\sum_{md\leqslant\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{m^4d^2}+O\left(x\cdot\sum_{md\leqslant\sqrt{x}}\frac{|\mu(d)|}{m^2}\right)=$$
$$\frac{x^2}{2}\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}\left(\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{x}}{d}}\frac{1}{m^4}\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \tag{3}$$

注意到

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^4}=\zeta(4)+O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

由 (3)式得

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)=\frac{x^2}{2}\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}$$

* 收稿日期: 2000-10-20

$$\left(\zeta(4)+O\left(\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{d}}\right)^3\right)\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2}\zeta(4)\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}+$$

$$O\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}d|\mu(d)|\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2}\zeta(4)\left(\frac{1}{\zeta(2)}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$\frac{x^2}{2}\frac{\zeta(4)}{\zeta(2)}+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

结合 $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$,立即得到

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{\pi^2}{30}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

于是完成了定理 1的证明。

定理 2的证明 应用(2)式得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)}=\sum_{m^2k\leqslant x}\frac{|\mu(k)|}{a(m^2k)}=\sum_{m^2k\leqslant x}\frac{|\mu(k)|}{k}$$

注意到(1)式及 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)+O\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right)$,

$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}+O\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right)$ 即可推得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{a(n)}=\sum_{m^2k\leqslant x}\frac{\sum_{d^2|k}\mu(d)}{k}=$$

$$\sum_{m^2d^2s\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2s}=$$

$$\sum_{d^2s\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2s}\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{x}}}1=$$

$$\sum_{d^2s\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2s}\left(\frac{\sqrt{x}}{d\sqrt{s}}+O(1)\right)=$$

$$\sqrt{x}\sum_{d^2s\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^3s^{\frac{3}{2}}}+O(\ln x)=$$

$$\sqrt{x}\sum_{s\leqslant x}\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\left(\sum_{d\leqslant\sqrt{\frac{x}{s}}}\frac{\mu(d)}{d^3}\right)+O(\ln x)=$$

$$\sqrt{x}\sum_{s\leqslant x}\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\zeta(3)}+O\left(\frac{s}{x}\right)\right)+O(\ln x)=$$

$$\sqrt{x}\frac{1}{\zeta(3)}\sum_{s\leqslant x}\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}+O(\ln x)=$$

$$\sqrt{x}\frac{1}{\zeta(3)}\left(\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)+$$

$$O(\ln x)=$$

$\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}\sqrt{x}+O(\ln x)$ 于是完成了定理 2的证明。

参考文献:

[1]潘承洞,潘承彪.初等数论[M].北京:北京大学出版社,1992.

[2] F. Smarandache. Only problems Not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

〔责任编辑 朱联营〕

On a problem of F. Smarandache

LIU Hong-yan[1], GOU Su[2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710069, China;

2. Department of Mathematics, Xi′an Intitute of Posts and Telecommunications, Xi′an 710061, China)

Abstract Let n be a postive integer, a(n) is a square complements of n, that is, a(n) is the smallest integer k such that nk is a perfeet square. The main purpose of this paper is to study the mean value property of a(n), and use the elementary methods to give two interesting asymptotic formulas.

Key words complement; mean value; asymptotic formula