关于 F. Smarandache的一个问题*

朱敏慧[1,2], 肖光发[3]

(1.西安工程科技学院 理学院,陕西 西安, 710048; 2.西北大学 数学系,陕西 西安 710069;
3.中铁一局电务工程有限公司,陕西 西安 710054)

摘 要: 引入一个新的数论函数,利用初等方法和解析方法研究了它的均值性质,并给出了这个新的数论函数与莫比乌斯数之间的一个恒等式以及均值公式.

关键词: 数论函数;均值;渐近公式

中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1004-602X(2005)02-0001-02

1 引言及结论

对任意正整数 n 及给定的素数 p,如果 $p^{T} \| n$,定义函数 $a_p(n) = p^{T}$, $a_p(1) = 0$. 关于这一函数性质研究,笔者至今未见相关论文.而这一问题本身的研究也是很有意义的. 这个函数是著名的 F. Smarandache函数 $e_p(n)$ (参阅文献 [1])的推广.关于 $e_p(n)$ 的性质,很多学者进行了研究,并获得了不少有趣的渐近公式(参阅文献 [2]).本文利用初等方法和解析方法研究了这个函数的性质,并得到了这个函数与莫比乌斯函数之间的一个恒等式以及它的均值公式.即有下面的:

定理 1 对任意正整数 n 及给定素数 p,我们有下列等式

$$\sum_{d|n} \_(d) a_p\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} p^{k-1}(p-1), & n = p^k, n > 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $\_(n)$ 是莫比乌斯函数.

定理 2 对任意实数 $x > 1$,有渐近公式

$$\sum_{n \le x} b_p(n) = x P_3(\ln x) + O(x^{\frac{1}{2}+X}),$$

其中 $b_p(n) = \sum_{d|n} a_p(n) a_p\left(\frac{n}{d}\right)$, $P_3(y)$ 为 y 的 3次多项式,且首项系数为 $c = \frac{1}{6} \frac{(p-1)^2}{p^2 \ln^2 p}$, X 为任意给定的正数.

2 定理的证明

现在给出定理证明:

定理 1证明: 我们用初等的方法来完成定理 1的证明.

对任意的复数 $s(\mathrm{Re}\, s > 1)$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_p(n)}{n^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{u=1 \\ (p,u)=1}}^{\infty} \frac{p^m}{(p^m u)^s} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{m(s-1)}} \sum_{\substack{u=1 \\ (p,u)=1}}^{\infty} \frac{1}{u^s} =$$

$$Y(s)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{m(s-1)}}. \tag{1}$$

即

$$\frac{1}{Y(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_p(n)}{n^s} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \frac{1}{p^{s-1}} + \frac{1}{p^{2(s-1)}} + \cdots\right) =$$

$$1 + \frac{p-1}{p^s} + \cdots + \frac{p^k - p^{k-1}}{p^{ks}} + \cdots. \tag{2}$$

因为 $\frac{1}{Y(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\_(n)}{n^s}$,所以

$$\frac{1}{Y(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_p(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\_(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_p(n)}{n^s} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \_(d) a_p\left(\frac{n}{d}\right)}{n^s} \tag{3}$$

* 收稿日期: 2005-04-20
基金项目: 国家自然科学基金(10271093)资助和陕西省自然科学基金(2004A09)资助.
作者简介: 朱敏慧(1977-),女,陕西富平县人,西北大学硕士研究生.

比较(2),(3)等式两边的系数,可得

$$\sum_{d|n}\mu(d)a_p\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}p^{k-1}(p-1), & n=p^k,n>1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

于是完成了定理(1)的证明.

定理2的证明: 我们也可以采用初等的方法来完成定理2的证明,但是用初等方法得到数论函数均值渐近公式的误差比较大,不利于我们分析和研究函数的性质,为了使数论函数的均值有一个更精确的渐近公式,我们利用解析方法来完成定理2的证明.

对任意的复数 $s(\mathrm{Re}\, s>1)$,设 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_p(n)}{n^s}$,其中 $b_p(n)=\sum_{d|n}a_p(n)a_p\left(\frac{n}{d}\right)$.

由(1)可得

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_p(n)}{n^s}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_p(n)}{n^s}\right)^2=\zeta^2(s)\frac{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)^2},$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemanne Zeta函数,并在 $s=1$ 处有一阶极点,留数为1.而 $f(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s=1$ 处有4阶极点,留数为

$$\frac{1}{3}\lim_{s\to 1}\left[(s-1)^4 f(s)\frac{x^s}{s}\right]'''=xP_3(\ln x),$$

此处 u''' 表示对复变量 s 求三阶导数,$P_3(y)$ 为 y 的三次多项式,且首项系数为

$$c=\frac{1}{6}\frac{(p-1)^2}{p^2\ln^2 p}.$$

在 Perron公式(参阅文献[3]中定理6.2)中取 $b=\frac{3}{2}$, $T>2$,可得

$$\sum_{n\le x}b_p(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{T}\right).$$

将上式积分线移至 $\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}+\varepsilon$ 处,于是取 $T=x$ 可得

$$\sum_{n\le x}b_p(n)=xP_3(\ln x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)=$$

$$xP_3(\ln x)+O\left(\int_{-T}^{T}\left|f\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+it\right)\right|\frac{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{1+|t|}dt\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)=$$

$$xP_3(\ln x)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

这就完成了定理2的证明.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.

[2] Zhang Wengpeng. Research on Smarandache problems in Number Theory[M]. The United States of America, 2004.

[3] Pan Chengdong and Pan Chengbiao. Foundation of Analytic Number Theory[M]. Beijing Science Press, 1977, 98.

〔责任编辑　贺小林〕

On a problem of F. Smarandache

ZHU Min-hui[1,2], XIAO Guang-fa[3]

(1. Math and Phys Dept of Xi′an Technology and Science University, Xi′an 710048, China;
2. Mathematics Department of Northwest University, Xi′an 710069, China;
3. The Electrification Engineering Co., Ltd. of the First Engineering Group of China Railway, Xi′an 710054, China)

Abstract The asymptotic property of a new arithmetical function was studied and some interesting asymptotic formulas were obtained.

Key words Arithmetical function; mean value; asymptotic formula