文章编号: 1003-2843(2011)02-0216-02

关于 F.Smarandache 简单函数的均值

刘华[1], 朱民[2]

(1. 商丘师范学院数学系, 河南商丘 476000; 2. 商丘师范学院软件学院, 河南商丘 476000)

摘　要：本文主要利用解析的方法研究了函数 $d(p(x))$ 的均值性质, 这里 $d(n)$ 是 Dirichlet 除数函数, 并给出了两个有趣的渐近公式.

关键词：Smarandache 简单函数; 数论函数; 渐近公式; 均值

中图分类号: O174　　**文献标志码**: A

doi：10.3969/j.issn.1003-2483.2011.03.11

1　内容简介和结果

对于任意正整数 n，F. Smarandache 函数 $s(n)$ 定义为最小正整数 m 能够被 n 整除的 $m!$,在文献[1]中 Jozsef Sandor 引入了 Smarandache 简单加性函数:

$$p(x)=\min\{m\in N^{+}: p^{x}\le m!\},$$

和

$$p^{*}(x)=\min\{m\in N^{+}: m!\le p^{x}\}.$$

它们定义在实数集上. 从上面的定义中可以很容易得出这样的结论：对于大于等于1的实数 x，当 $(m-1)!< p^{x}\le m!$ 时 $p^{x}=m$，对于 $p(x)$ 的性质很多专家学者都做过相关的研究, 例如文献[1-2]. 但是对于 $d(p(x))$ 均值的研究还未曾看到, $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数, 本文主要利用了解析的方法研究了 $d(p(x))$ 的渐进性质, 并给出了一些有趣的渐近公式, 这就是下面将要证明的定理.

定理 1　设 p 为一个给定的素数, 对于任意实数 $x\ge 1$, 有如下渐近公式

$$\sum_{n\le x} d(p(n))=x(\ln x-2\ln\ln x)+O(x)\cdot$$

定理 2　设 p 为一个给定的的素数, 对于任意实数 $x\ge 1$, 有如下渐近公式

$$\sum_{n\le x} d(p^{*}(n))=x(\ln x-2\ln\ln x)+O(x)\cdot$$

2　定理的证明

在本节中完成定理的证明, 首先需要如下引理:

引理 1　对于任意实数 x, 有下面结论:

$$\sum_{n\le x} d(n)=x\ln x+(2c-1)x+O(\sqrt{x}),$$

这里 c 是 Euler 常数.

引理 2　对于任意大于等于 2 的实数 m，则有:

收稿日期：2010-12-07

作者简介：刘华(1982-), 女, 河南民权人, 助教, 主要研究方向: 数论. Email: liuhua0408@126. com

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\sum_{t=1}^{x}\frac{\ln t}{t}=\frac{1}{2}\ln^2 x+A+O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

这里 A 为一个常数.

引理 1 与引理 2 的证明参见文献[3].

利用上面的引理直接证明定理, 由 $d(n)$ 和 $p(n)$ 的定义可知

$$\sum_{n\le x}d(p(n))=\sum_{n\le x}\sum_{\frac{\ln((m-1)!)}{\ln p}<n\le\frac{\ln(m!)}{\ln p}}d(m),$$

因为当 $n\in\left(\frac{\ln((m-1)!)}{\ln p},\ \frac{\ln(m!)}{\ln p}\right]$ 时, $p(n)=m$, 又因为 $n\le x$, 那么区间 $\left(\frac{\ln((m-1)!)}{\ln p},\ \frac{\ln(m!)}{\ln p}\right]$ 中最大的数也一定小于等于 x. 于是得到 $\ln(m!)\le x\ln p$, 结合 Euler 求和公式, 很用以得到 $m!$ 的主项为 $m\ln m$, 并且 $m\ln m\le x\ln p$.

如果 $m>\frac{x\ln p}{\ln^2 x}$, 那么 $\ln m$ 渐近于 $\ln x$, 于是有 $m\le\frac{x\ln p}{\ln x}$.

根据上面的讨论得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}d(p(n))&=\sum_{n\le x}\sum_{\frac{\ln((m-1)!)}{\ln p}<n\le\frac{\ln(m!)}{\ln p}}d(m)\\
&=\sum_{m\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\left[\frac{\ln m}{\ln p}\right]d(m)+O(x\ln p)=\sum_{m\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\frac{\ln m}{\ln p}d(m)+O(x)\\
&=\frac{1}{\ln p}\sum_{un\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\ln un+O(x)=\frac{2}{\ln p}\sum_{u\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\ln u\sum_{n\le\frac{x\ln p}{u\ln x}}1+O(x)\\
&=\frac{2}{\ln p}\sum_{u\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\ln u\left[\frac{x\ln p}{u\ln x}\right]+O(x)=\frac{2x}{\ln x}\sum_{u\le\frac{x\ln p}{\ln x}}\frac{\ln u}{u}+O(x)\\
&=\frac{2x}{\ln x}\left(\frac{1}{2}(\ln x+\ln\ln p-\ln\ln x)^2\right)+O(x)=x(\ln x-2\ln\ln x)+O(x).\end{aligned}$$

定理 1 就得到了证明. 使用相同的方法很容易证明定理 2.

参考文献:

[1] JOZSEF SANDOR. On additive analogue of certain arithmetic functions, Smarandache Notions Journal[J]. 2004, (14): 128-132.

[2] ZHU MINHUI. The additive analogue of Smarandache simple function, Reseach on Smarandache problem in number theory, hexis[J]. 2004: 39-41.

[3] APOSTOL T M. Introduction to analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[5] 闵嗣鹤, 严士键. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.

The mean value on F. Smarandache simple function

LIU Hua, ZHU Min

(Shangqiu Normal College, Shangqiu 476000, P.R.C.)

Abstract: The main purpose of this paper is to use the analytic methods to study the mean value properties of $d(p(x))$, where $d(n)$ is the Dirichlet divisor function, and gives two interestig asymptotic formula for it.

Key words: F.Smarandache simple function; number theory function; asymptotic formula; mean value

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net