第34卷 第7期　　河南科学　　Vol.34 No.7
2016年7月　　HENAN SCIENCE　　Jul. 2016

文章编号:1004-3918(2016)07-1026-05

关于Smarandache Ceil 函数的均值问题

薛　阳，高　丽

（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安　716000）

摘　要：对任意正整数 n，$k\geqslant 2$ 为给定整数，Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为最小的正整数 x，使得 $n\,|\,x^k$，即 $S_k(n)=\min\left\{x\in N:n\,|\,x^k\right\}$．利用Smarandache Ceil 函数的定义及解析方法，研究了Smarandache Ceil 函数与素因子积函数 $U(n)$ 的均值分布问题，并给出了 $\left(S_k(n)+U(n)\right)^3$ 的一个有趣的渐近公式．

关键词：Smarandache Ceil 函数；均值分布；解析方法；渐近公式

中图分类号：O 156.4　　**文献标识码**：A

On the Mean Value Problem of the Smarandache Ceil Function

Xue Yang，　Gao Li

（School of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，Shaanxi China）

Abstract：For any positive integer n and the given positive integer k $(k\geqslant 2)$, Smarandache Ceil function $S_k(n)$ is defined as the smallest positive integer x which makes $n\,|\,x^k$, that is $S_k(n)=\min\left\{x\in N:n\,|\,x^k\right\}$. The definition and the analytic method of the Smarandache Ceil function was utilized to study the mean value distribution problem of Smarandache Ceil function and product of prime divisor function $U(n)$, and give an interesting asymptotic formula of $\left(S_k(n)+U(n)\right)^3$.

Key words：Smarandache Ceil function；the mean value distribution；analytic method；asymptotic formula

1　引言及结论

著名数论专家Smarandache 教授在文献[1]中引入了Smarandache Ceil 函数与素因子函数 $U(n)$，即 $\forall k\in N_+,k\geqslant 2$，Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为最小的正整数 x，使得 $n\,|\,x^k$，即

$$S_k(n)=\min\left\{x\in N:n\,|\,x^k\right\},$$

素因子积函数 $U(n)$ 则被定义为

$$U(1)=1,U(n)=\prod_{p|n}p\,.$$

目前已有许多学者对此进行了研究，并获得了一些结果[2-14].

本文主要利用解析方法，研究均值

$$\sum_{n\leqslant x}\left(S_k(n)+U(n)\right)^3$$

收稿日期：2016-01-24

基金项目：国家自然科学基金(11471007)；陕西省科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019)；延安大学高水平大学建设项目(2012SXTS07)

作者简介：薛　阳(1990-)，女，硕士研究生，主要研究方向为数论

高　丽(1966-)，女，教授，硕士生导师，主要从事数论研究.

的分布问题,并给出一个有趣的渐近公式,即下述定理.

定理 设$k\geqslant 2$是一个整数,那么$\forall x\in R,x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\left(S_k(n)+U(n)\right)^3=\frac{3\zeta(4)\zeta(4k-3)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{7-4k}}{p^3+p^4}\right)+$$
$$\frac{9\zeta(4)\zeta(4k-2)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{3-4k}+p^{6-4k}-p^{2-4k}}{p^3+p^4}\right)+$$
$$\frac{9\zeta(4)\zeta(4k-1)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{5-4k}-p^{1-4k}+p^{3-4k}}{p^3+p^4}\right)+\frac{3\zeta(4)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3+p^4}\right)+O\left(x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中:$\zeta(s)$是Riemann Zeta-函数,ε是任意给定的正实数.

2 引理及定理的证明

引理1[15] 令f是一个积性数论函数,使得$\sum f(n)$绝对收敛.那么,这个级数的和能表示为在所有素数上展开的一个绝对收敛的无穷乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_p\left\{1+f(p)+f\left(p^2\right)+\cdots\right\},$$

如果f是完全积性的,则乘积可简化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_p\frac{1}{1-f(p)},$$

上面的乘积称为级数的欧拉乘积.

引理2[15] (Perron公式)令

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

对$\sigma>\sigma_a$是绝对收敛的.又令$c>0,x>0$是任意的,那么,当$\sigma>\sigma_a-c$时,我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}F(s+z)\frac{x^z}{z}\mathrm{d}z=\sum_{n\leqslant x}^{*}\frac{f(n)}{n^s},$$

其中$\sum^{*}$意指和里最后的项当x是整数时,必须乘以$\frac{1}{2}$.

定理的证明

$$\sum_{n\leqslant x}\left(S_k(n)+U(n)\right)^3=\sum_{n\leqslant x}S_k^3(n)+3\sum_{n\leqslant x}S_k^2(n)U(n)+3\sum_{n\leqslant x}S_k(n)U^2(n)+\sum_{n\leqslant x}U^3(n).\qquad(1)$$

设

$$f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^3(n)}{n^s},\ f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U^3(n)}{n^s},\ f_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^2(n)U(n)}{n^s},\ f_4(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k(n)U^2(n)}{n^s}.$$

易知$S_k^3(n),U^3(n),S_k^2(n)U(n)$及$S_k(n)U^2(n)$均为可乘函数,于是由引理1(Euler乘积公式)有

$$f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^3(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{S_k^3(p)}{p^s}+\frac{S_k^3\left(p^2\right)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k^3\left(p^k\right)}{p^{ks}}+\frac{S_k^3\left(p^{k+1}\right)}{p^{(k+1)s}}+\frac{S_k^3\left(p^{k+2}\right)}{p^{(k+2)s}}+\cdots\right)=$$
$$\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}+\frac{p^3}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^3}{p^{ks}}+\frac{p^6}{p^{(k+1)s}}+\frac{p^6}{p^{(k+2)s}}+\cdots\right)=$$

$$\zeta(ks-3)\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)/\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)=\zeta(s)\zeta(ks-3)\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}-\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^{ks-3}}\right)=$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(ks-3)\zeta(s-3)}{\zeta(2s-6)}\prod_p\left(1-\left(1+\frac{p^3}{p^{(k-1)s}}\right)/\left(p^s+p^3\right)\right), \tag{2}$$

$$f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U^3(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{U^3(p)}{p^s}+\frac{U^3(p^2)}{p^{2s}}+\frac{U^3(p^3)}{p^{3s}}+\cdots+\frac{U^3(p^k)}{p^{ks}}\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}+\frac{p^3}{p^{2s}}+\frac{p^3}{p^{3s}}+\cdots+\frac{p^3}{p^{ks}}\right)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-3}}-\frac{1}{p^s}\right)/\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=$$

$$\prod_p\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\left(1+\frac{1}{p^{s-3}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s\left(1+\frac{1}{p^{s-3}}\right)}\right)=\frac{\zeta(s)\zeta(s-3)}{\zeta(2s-6)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s+p^3}\right), \tag{3}$$

$$f_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^2(n)U(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{S_k^2(p)U(p)}{p^s}+\frac{S_k^2(p^2)U(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k^2(p^k)U(p^k)}{p^{ks}}+\frac{S_k^2(p^{k+1})U(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}+\frac{p^3}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^3}{p^{ks}}+\frac{p^5}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)=$$

$$\zeta(ks-2)\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^{ks}}-\frac{1}{p^{(k-1)s+1}}+\frac{1}{p^{ks+1}}\right)/\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)=$$

$$\zeta(s)\zeta(ks-2)\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}-\frac{1}{p^s}-\frac{p^3}{p^{(k+1)s}}-\frac{p^3}{p^{ks+1}}+\frac{p^3}{p^{(k+1)s+1}}\right)=$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(ks-2)\zeta(s-3)}{\zeta(2s-6)}\prod_p\left(1-\left(1+\frac{p^3}{p^{ks}}+\frac{p^3}{p^{(k-1)s+1}}-\frac{p^3}{p^{ks+1}}\right)/\left(p^s+p^3\right)\right), \tag{4}$$

$$f_4(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k(n)U^2(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{S_k(p)U^2(p)}{p^s}+\frac{S_k(p^2)U^2(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k(p^k)U^2(p^k)}{p^{ks}}+\frac{S_k(p^{k+1})U^2(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{p^3}{p^s}+\frac{p^3}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^3}{p^{ks}}+\frac{p^4}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{1-\frac{1}{p^{ks}}}{1-\frac{1}{p^s}}\times\frac{1}{p^{s-3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{p^{ks-1}}}\right)=$$

$$\zeta(s)\zeta(ks-1)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{s-3}}-\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^{ks-1}}+\frac{1}{p^{(k+1)s-1}}-\frac{1}{p^{(k+1)s-3}}\right)=$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)\zeta(s-3)}{\zeta(2s-6)}\prod_p\left(1-\left(1+\frac{1}{p^{(k-1)s-1}}-\frac{1}{p^{ks-1}}+\frac{1}{p^{ks-3}}\right)/\left(p^s+p^3\right)\right), \tag{5}$$

其中 $\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数.

由引理2知在Perron公式中,取 $s_0=0,b=9/2,T=x$,则有

$$\sum_{n\le x}S_k^3(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{9}{2}-it}^{\frac{9}{2}+it}\frac{\zeta(s)\zeta(ks-3)\zeta(s-3)}{\zeta(2s-6)}\prod_p\left(1-\left(1+\frac{p^3}{p^{(k-1)s}}\right)/\left(p^s+p^3\right)\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}\right), \tag{6}$$

其中 ε 是任意给定的正实数.

我们知道函数

$$\frac{\zeta(s)\zeta(ks-3)\zeta(s-3)}{\zeta(2s-6)}\prod_p\left(1-\left(1+\frac{p^3}{p^{(k-1)s}}\right)/\left(p^s+p^3\right)\right),$$

在 $s=4$ 处有一个一阶极点,其留数为

$$\frac{3\zeta(4)\zeta(4k-3)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{7-4k}}{p^3+p^4}\right),$$

于是由式(1),(6)以及Riemann zeta-函数的性质可得渐近公式

$$\sum_{n\le x}S_k^3(n)=\frac{3\zeta(4)\zeta(4k-3)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{7-4k}}{p^3+p^4}\right)+O\left(x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}\right). \tag{7}$$

同理可得

$$\sum_{n\le x}S_k^2(n)U(n)=\frac{3\zeta(4)\zeta(4k-2)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{3-4k}+p^{6-4k}-p^{2-4k}}{p^3+p^4}\right)+O\left(x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}\right). \tag{8}$$

$$\sum_{n\le x}S_k(n)U^2(n)=\frac{3\zeta(4)\zeta(4k-1)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{5-4k}-p^{1-4k}+p^{3-4k}}{p^3+p^4}\right)+O\left(x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}\right). \tag{9}$$

$$\sum_{n\le x}U^3(n)=\frac{3\zeta(4)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3+p^4}\right)+O\left(x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}\right). \tag{10}$$

结合式(1),式(7)~(10)可得渐近公式

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\left(S_k(n)+U(n)\right)^3=&\frac{3\zeta(4)\zeta(4k-3)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{7-4k}}{p^3+p^4}\right)+\\&\frac{9\zeta(4)\zeta(4k-2)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{3-4k}+p^{6-4k}-p^{2-4k}}{p^3+p^4}\right)+\\&\frac{9\zeta(4)\zeta(4k-1)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1+p^{5-4k}-p^{1-4k}+p^{3-4k}}{p^3+p^4}\right)+\\&\frac{3\zeta(4)x^4}{2\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3+p^4}\right)+O\left(x^{\frac{7}{2}+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

因此,定理得证.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 82.

[2] Zhang Wenpeng. Identities on the k-power complements[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory，HEXIS，2004：61-64.

[3] Xu Zhefeng. On the Smarandache Ceil function and the number of prime factors[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory. Phoenix USA：Hexis，2004：71-76.

[4] Ren Dongmei. On the Smarandache Ceil function and the dirichlet divisor function[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory（Vol.Ⅱ）. Phoenix USA：Hexis，2005：51-54.

[5] Lu Yaming. On a dual function of the Smarandache Ceil function[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory（Vol.Ⅱ）. Phoenix USA：Hexis，2005：54-57.

[6] 祁　兰，赵院娥. 关于Smarandache Ceil函数的一个混合均值[J]. 甘肃科学学报，2014，26（3）：12-13.

[7] 吴成晶. Smarandache Ceil函数的均值[J]. 纺织高校基础科学学报，2014，27（4）：428-430.

[8] 苟　素. Smarandache Ceil函数的均值[J]. 宁夏大学学报：自然科学版，2005（3）：219-220.

[9] 冯　强，郭金保. 关于Smarandache Ceil函数及其对偶函数的均值[J]. 西南民族大学学报：自然科学版，2007（4）：713-717.

[10] 冯　强，王荣波. 关于k阶Smarandache Ceil函数与$ak(n)$的渐近公式[J]. 延安大学学报：自然科学版，2005（2）：10-12.

[11] 赵杏花，郭金保，穆秀梅，等. 两个关于k阶Smarandache Ceil函数的方程[J]. 陕西理工学院学报：自然科学版，2011（4）：74-76.

[12] 朱敏慧. 一个包含Euler函数及k阶Smarandache Ceil函数的方程及其正整数解[J]. 纯粹数学与应用数学，2009（2）：414-416.

[13] 吕二兵. 关于Smarandache Ceil函数的一类均值问题[J]. 纺织高校基础科学学报，2013，26（2）：155-157.

[14] 沈　虹. 一个新的数论函数及其它的均值分布[J]. 纯粹数学与应用数学，2007，23（2）：235-238.

[15] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1991.

（编辑　张松林）