第 35 卷 第 4 期
2015 年 12 月

安徽理工大学学报(自然科学版)
Journal of Anhui University of Science and Technology(Natural Science)

Vol. 35 No. 4
Dec. 2015

关于 Smarandache LCM 函数与 Smarandache 简单数列的混合均值

赖展翅

(咸阳职业技术学院基础部,陕西 咸阳 712000)

摘 要: 为了研究 Smarandache LCM 函数与 Smaran - dache 简单数列的混合均值性质,利用初等方法和解析方法,获得了复合函数 $SL(p_d(n))$ 的混合均值的性质及渐近公式。发展了 F. Smarandache 教授在《Only Problems, Not solutions》一书中相关问题的研究工作。

关键词: Smarandache LCM 函数; Smarandache 简单数列; 混合均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672 - 1098(2015)04 - 0016 - 03

One hybrid Mean Value Formula Involving of Smarandache LCM Function and Smarandache Sequences

LAI Zhan - chi

(Department of Basic Courses, Xianyang Vocational and Technical College, Xianyang Shaanxi 712000, China)

Abstract: In order to study the hybrid mean value properties of Smarandache LCM function and Smarandache sequences, the primary method and the analysis method were used. The hybrid mean value nature of the composite function $SL(p_d(n))$ and its asymptotic formula were obtained. The study developed research work for the questions described in the book "Only Problems, Not solutions" by Professor F. Smarandache.

Key words: Smarandache LCM function; Smarandache sequences; mean value; asymptotic formula

1 引言及结论

设 n 为正整数,著名的 F. Smarandacl7e LCM 函数 $SL(n)$ [1]: $SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\}$,其中 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式。

Smarandache 简单数集 A:

$$P_d(n) = \prod_{d \mid n} d = \prod_{\frac{n}{d} \mid n} \frac{n}{d} = \left(\prod_{d \mid n} d \cdot \frac{n}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{d(n)}{2}};$$

$P_d(n)$ 表示不大于 n 的真因子积。

$$q_d(n) = \prod_{d \mid n, d < n} d = \frac{\prod_{d \mid n} d}{n} = n^{\frac{d(n)}{2} - 1};$$ $q_d(n)$ 表示小于 n 的真因子积。

其中 $d(n)$ 为 n 的所有正因数的个数。这两个数列称为 Smaran - dache 简单数列。

对于 Smarandache LCM 函数与 Smaran - dache 简单数列的研究文献已不少[2-9],本文在前面文献的基础上,利用初等方法和解析数论方法,研究了复合函数 $SL(P_d(n))$ 与 $SL(q_d(n))$ 的混合均值性质,即就是将证明以下结论:

定 理 设 $k \geqslant 2$ 是给定正整数,对于任意整数 $x \geqslant 1$,有下面的渐进公式:

收稿日期: 2015 - 02 - 09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省自然科学基金资助项目(SJ08A28)

作者简介: 赖展翅(1964 -),男,陕西咸阳人,副教授,硕士,研究方向: 基础数学及应用数学研究。

$$\sum_{n\leqslant x} SL(p_d(n)) = \frac{\pi^4}{72}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$$

$$\sum_{n\leqslant x} SL(q_d(n)) = \frac{\pi^4-12\pi^2}{72}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$，$d_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

2　引理及其证明

引理 1[3]187　对于任何正整数 α_i，则有 $SL(p_i^{\alpha_i})<\alpha_i p_i$。特别的，当 $\alpha_i<p_i$，有 $SL(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i$，这里 p_i 是素数。

引理 2[3]187　对于任意正整数 n，若它的标准素因数分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则有 $SL(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{SL(p_i^{\alpha_i})\}$。

引理3　设 $P(n)$ 是 n 的最大素因子，如果 $P>\sqrt{n}$，则有

$SL(n)=P(n)$。

证　明　设 p_i 是 n 的素因子，$(1<i<k$ 且 $p_i\neq P)$，有 $SL(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i$

下面分三种情形讨论 $SL(p_i^{\alpha_i})$ 的上界：

1）如果 $\alpha_i=1$，则 $SL(p_i^{\alpha_i})=p_i$；

2）如果 $\alpha_i=2$，$SL(p_i^2)=2p_i\leqslant 2n^{\frac{1}{4}}<\sqrt{n}$；

3）如果 $\alpha_i\geqslant 3$，$SL(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i\leqslant \alpha_i n^{\frac{1}{2\alpha_i}}\leqslant n^{\frac{1}{2\alpha_i}}\dfrac{\ln n}{\ln p_i}<\sqrt{n}$。

事实上如果 $p^\alpha\mid n$，有 $\alpha\leqslant\dfrac{\ln n}{\ln p}$，结合上述三种情形得到：

$$SL(p_i^{\alpha_i})\leqslant\sqrt{n} \tag{1}$$

若 $p_i=P$，由 P 的定义以及 $P>\sqrt{n}$，有

$$SL(P(n))=P(n) \tag{2}$$

由式(1)与式(2)立刻得到

$$SL(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{SL(p_i^{\alpha_i})\}=SL(P(n))=P(n)$$

完成了推论的证明。

引理 4[10]81　对于任何实数 $x>1$，有渐近公式

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant n}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $a_i=(i-1)!$，$(i=1,2,3,\cdots,k)$。

3　定理的证明

对于任意的 $n\geqslant 1$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准素因子分解式，现将区间 $(1,x]$ 上的所有正整数拆分成如下两个子集 A，B：即 $A=\{n\in(1,x]\mid$，存在素数 P，使得 $P\mid n$，且 $P>\sqrt{n}$，$n\in N^+.\}$，其中 $P(n)$ 是 n 的最大素因子；$B=\{n\in(1,x]\mid,n\notin A,n\in N^+.\}$

分类讨论

1）对于任意的 $n\geqslant 1$ 且 $n\in A$，则 $n=mP(n)=mp$，$(m,p)=1$，且 $m<\sqrt{n}<p$，易见：$d(m)<\sqrt{n}<p$ 及 $d(n)=2d(m)$，根据引理 3，有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} SL(P_d(n))=\sum_{\substack{mp\leqslant x\\ m\leqslant x}} SL((mp)^{\frac{d(mp)}{2}})=\sum_{\substack{mp\leqslant x\\ m\leqslant x}} SL(p^{d(m)})=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}} d(m)p=$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}} d(m)\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}} p=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}} d(m)\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}} p+O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt{x}} d(m)\cdot\frac{m}{\ln m}\right)=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}} d(m)\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}} p+O(x) \tag{3}$$

由 Abel 求和公式[10]77及引理 4 有：

$$\sum_{p\leqslant\frac{x}{m}} p=\int_{\frac{3}{2}}^{x} t^2\,\mathrm{d}\pi(t)=\frac{x}{m}\cdot\pi\left(\frac{x}{m}\right)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2m^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2\cdot\ln^i x}{m^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{m^2\ln^{k+1}x}\right) \tag{4}$$

其中 $b_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

注意到 $\zeta(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ 及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2=\frac{\pi^4}{36} \tag{5}$$

由式(3)~式(5)可推得：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} SL(P_d(n)) = \sum_{m\leqslant\sqrt{x}} d(m)\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}} p + O(x) =$$

$$\frac{x^2}{2\ln x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{d(m)}{m^2} + \sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2 d(m)\cdot\ln^i x}{m^2\ln^i x} +$$

$$O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}) = \frac{\pi^4}{72}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x})$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

2）若 $n\in B$，由引理1、引理2及 $q_d^2(n)=n^{d(n)}$ 有：$P_d(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}=p_1^{\alpha_1\cdot\frac{d(n)}{2}}p_2^{\alpha_2\cdot\frac{d(n)}{2}}\cdots p_r^{\alpha_r\cdot\frac{d(n)}{2}}$，从而

$$SL(P_d(n)) = SL(p_1^{\alpha_1\cdot\frac{d(n)}{2}}p_2^{\alpha_2\cdot\frac{d(n)}{2}}\cdots p_r^{\alpha_r\cdot\frac{d(n)}{2}}) =$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{SL(p_i^{\alpha_i\cdot\frac{d(n)}{2}})\} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i\cdot\frac{d(n)}{2}p_i\} \leqslant$$

$$\frac{d(n)}{2}\sqrt{n}\ln n$$

由文献[9]知道 $\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\ln x + O(x) \ll x\ln x$，因此可得：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}} SL(P_d(n)) \leqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\frac{d(n)}{2}\sqrt{n}\ln n \ll$$

$$\sum_{n\leqslant x} d(n)\sqrt{x}\ln x \ll x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x$$

结合式(1)和式(2)立即得到：

$$\sum_{n\leqslant x} SL(P_d(n)) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} SL(P_d(n)) + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}} SL(P_d(n)) =$$

$$\frac{\pi^4}{72}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x})$$

其中 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

用类似的方法可证明

$$\sum_{n\leqslant x} SL(q_d(n)) = \frac{\pi^4-12\pi^2}{72}\cdot\frac{x^2}{\ln x} +$$

$$\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x})$$

其中 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数。

定理证明完毕。

参考文献：

[1] F SMARANDACHE. Only Problems, Not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 23.

[2] JOZSEF SANDOR. On certain ineqvialities involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 75－80.

[3] LE MAOHUA. An equation concerning Smarandache LCM function [J]. Notions Journal, 2004: 186－188.

[4] 黄炜. 2个 Smarandache LCM 函数的混合均值估计 [J]. 纺织基础科学学报, 2011, 24(3): 390－393.

[5] CHEN JIAN－BIN. Value distribution of the F. Smarandache LCM function [J]. ScientiaMagna, 2007, 3(2): 15－18.

[6] 黄炜. 关于一类 Smarandache LCM 函数混合均值研究 [J]. 西安文理学院学报: 自然科学版, 2012, 15(1): 1－3.

[7] 张梅, 郭金保. 关于简单数序列的均值 X [J]. 延安大学学报: 自然科学版, 2005, 24(3): 5－6.

[8] 刘红艳. 关于简单数序列的均值性质 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2004(1): 28－30.

[9] 王明军. 关于简单数序列的一些研究 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 36(3): 14－16.

[10] TOM M, APOSTOL. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring－Verlag, 1976: 77.

[11] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 93.

(责任编辑：何学华)