关于 Smarandache *LCM* 函数与 k 次补数的一个混合均值

柴晶霞，高　丽，拓　磊

(延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘　要：对任意的非负整数 n，著名的 Smarandache *LCM* 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k，使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$，其中 $n\mid[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数。设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数，$b_k(n)$ 定义为最小的正整数使得 $b_k(n)\cdot n$ 为完全 k 次幂，则称 $b_k(n)$ 为 n 的 k 次补数。本文主要利用初等及解析方法，研究复合函数 $SL(b_k(n))$ 与 n 的最大素因子函数 $P(n)$ 的均方差，得到了一个较强的渐近公式。

关键词：Smarandache *LCM* 函数；k 次补数；均值；渐近公式

中图分类号：O156.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1004-602X(2010)03-0010-03

1　引言及主要结果

美籍罗马尼亚著名的数论专家 F. Smarandache 教授在文献[1]中提出 $SL(n)$ 函数，$SL(n)$ 定义为最小的正整数 k，使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$，其中 $n\mid[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数，即 $SL(n)=\min\{k: n\mid[1,2,\cdots,k]\}$，例如 $SL(1)=1$，$SL(2)=2$，$SL(3)=3\cdots$由 $SL(n)$ 的定义我们容易推出：如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式，那么 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}$。关于 $SL(n)$ 的性质，许多学者进行了研究，并获得了很多有趣的结果。例如文献[2]里证明了如果 n 是一个素数，那么 $SL(n)=S(n)$，这里 $S(n)$ 是 F. Smarandache 函数，即就是 $S(n)=\min\{m: n\mid m!, n\in N\}$。文献[3]研究了 $SL(n)$ 的均值问题，证明了对任意给定的正整数 k 及其任意实数 $x>2$，有渐近公式 $\sum\limits_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum\limits_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+0\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$。其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数。文献[4]研究了 $[SL(n)-S(n)]^2$ 的值分布问题，证明了渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}[SL(n)-S(n)]^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\cdot\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数，$b_k(n)$ 定义为最小的正整数使得 $b_k(n)\cdot n$ 为完全 k 次幂，则称 $b_k(n)$ 为 n 的 k 次补数。本文的主要目的是研究复合函数 $SL(b_k(n))$ 与 n 的最大素因子函数 $P(n)$ 的均方差，得到了一个较强的渐近公式。

定理1　设 $k\geqslant 2$ 是一个给定的整数，那么对任意实数 $x\geqslant 3$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta 函数。

定理2　设 $k\geqslant 2$ 是一个给定的整数，对任意实数 $x\geqslant 3$，有渐近公式

收稿日期：2010-03-31
基金项目：陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)
作者简介：柴晶霞(1986—)，女，陕西府谷人，延安大学在读硕士研究生。

$$\sum_{n\leqslant x}(V(b_k(n))-(k-1)P(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)+O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right)。$$

其中 $V(n)$ 函数定义为：$V(1)=1$，当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2},\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准素因子分解式时，$V(n)=\min\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\cdots\alpha_rp_r\}$。其中 $c_i(i=1,2,\cdots k)$ 是常数，$c_i=\frac{2}{3}$。

2　引理

为了证明定理，我们引入下面引理。

引理　设 $k\geqslant2$ 是一个给定的整数，那么对任意实数 $x\geqslant3$，有估计式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2<<k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

及 $\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(V(b_k(n))-(k-1)P(n))^2<<k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$。

证明　设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式。$b_k(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$。则：

$SL(b_k(n))=\max\{p_1^{\beta_1},p_2^{\beta_2},\cdots,p_r^{\beta_r}\}$。

令 $\beta p=\max\{\beta_1p_1,\beta_2p_2,\cdots,\beta_rp_r\}$，于是有 $SL(b_k(n))\leqslant\beta p\leqslant kp$。注意当 $p(n)$ 在 n 的标准分解式中的方幂为 1 时，$\beta=k-1$，此时 $SL(b_k(n))-(k-1)p(n)=0$，所以有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)<<n^{\frac{1}{3}}}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2<<\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}},p^2(n)\mid n}}k^2P(n)\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}k^2p^2<<\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{n\leqslant\frac{x}{p^2}}k^2<<k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

同理可推出另一个估计式，于是完成了引理的证明。

3　定理的证明

下面我们直接给出定理的证明。

对任意正整数 $n>1$，如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式，那么 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}$，我们直接考虑 $\sum\limits_{n\leqslant x}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2$。将区间 $[1,x]$ 上所有的分成下面四个子集合：

A：$P(n)\geqslant\sqrt{n}$ 且 $n=m\cdot P(n)$，$m<P(n)$；

B：$n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$ 且 $n=m\cdot P^2(n)$，$m<n^{\frac{1}{3}}$；

C：$n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$ 且 $n=m\cdot p_1\cdot P(n)$，p_1 是素数；

D：$p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}$。

显然如果 $n\in A$ 有 $SL(b_k(n))=(k-1)P(n)$，因此有 $\sum\limits_{n\in A}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2=0$，类似的，如果 $n\in C$，同样有 $SL(b_k(n)=(k-1)P(n)$，$\sum\limits_{n\in C}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2=0$，现在我们来估计集合 B 的主项，由引理有：

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2+O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right)\qquad(1)\end{aligned}$$

当 $k>2$ 时，有 $(SL(b_k(n))=(k-2)P(n)$，由 (1) 式有：

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(SL(b_k(n))-(k-1)P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}(SL(b_k(mp^2))-(k-1)P(mp^2))^2\\
&=\sum_{m<n^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}(p^2-p)^2\qquad(2)\end{aligned}$$

当 $k=2$ 时，有 $SL(b_k(n))\leqslant k^2P(m)\leqslant k^2\cdot n^{\frac{1}{3}}$ 此时仍然有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(SL(b_2(n))-P(n))^2\\
&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p(n)\leqslant\sqrt{mp^2}}}(SL^2(b_2(n))-2pSL(b_2(n))+p^2)\\
&=\sum_{mp^2\leqslant x}(p^2-p)^2+O\left(\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}\left((mp^2)\frac{2}{3}+(mp^2)^{\frac{1}{3}}p\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{m \leqslant x^{\frac{1}{3}}} \sum_{m < p \leqslant \sqrt{\frac{x}{m}}} (p^2 - p)^2 + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right) \qquad (3)$$

结合(2),(3),应用 Abel 求和法和素数定理 $\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$,并注意到 $x^{\frac{4}{3}} << \frac{x^{\frac{3}{2}} p}{\ln^2 x}$,知当 $k \geqslant 2$ 时,有

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n^{\frac{1}{3}} < P(n) \leqslant \sqrt{n}}} (SL(b_k(n)) - (k-1)P(n))^2$$

$$= \sum_{m < n^{\frac{1}{3}}} \sum_{m < p \leqslant \sqrt{\frac{x}{m}}} (p^2 - p)^2 + O\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= \sum_{m \leqslant n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5m^{\frac{5}{2}}(\ln x - \ln m)} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{5}{2}} \ln^2 \sqrt{\frac{x}{m}}} \right) \right)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right) \qquad (4)$$

最后我们估计集合 D 的主项,对任意的 $n \in D$,设 $SL(n) = p^{\alpha}$,如果 $\alpha = 1$,则 $SL(b_k(n)) = (k-1)P(n)$,所以有 $SL(b_k(n)) - (k-1)P(n) = 0$。因此设 $\alpha \geqslant 2$ 记 $P(n) \leqslant n^{\frac{1}{3}}$,有:

$$\sum_{n \in D} (SL(b_k(n)) - (k-1)P(n))^2 << \sum_{n \in D} SL(b_k(n))^2 + (k-1)^2 P^2(n))$$

$$<< \sum_{\substack{mp^{\alpha} \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2, p < x^{\frac{1}{3}}}} p^{2\alpha} + \sum_{n \leqslant x} n^{\frac{2}{3}} << \sum_{\substack{p^{\alpha} \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2, P \leqslant x^{\frac{1}{3}}}} p^{2\alpha} \sum_{m \leqslant \frac{x}{p^{\alpha}}} 1 + x^{\frac{5}{3}}$$

$$<< x \cdot \sum_{\substack{p^{2\alpha} \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2, p < x^{\frac{1}{3}}}} p^{2\alpha} + x^{\frac{5}{3}} << x^2 。$$

综合以上讨论,我们得到渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} (SL(b_k(n)) - (k-1)P(n))^2$$

$$= \sum_{n \in A} (SL(b_k(n)) - (k-1)P(n))^2 + \sum_{n \in B} (SL(b_k(n)) - (k-1)P(n))^2 + \sum_{n \in C} (SL(b_k(n)) - (k-1)P(n))^2 + \sum_{n \in D} (SL(b_k(n)) - (k-1)P(n))^2$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln^x}\right)$$

用同样的方法可以证明定理 2。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001(12): 307-309.

[3] Lv Zhongtian. On the F. Smaradanche *LCM* function and its mean value [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[4] Jian Ge. Mean value of the F. Smaradanche *LCM* function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-112.

[责任编辑 贺小林]

On the Hybrid Mean Value of the Smarandache *LCM* Function and the *k*-Power Complements

CHAI Jing-xia, GAO LI, TUO LEI

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan university, Yanan 716000, China)

Abstract: For any positive integer, the famous F. Smarandache *LCM* function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer such that $n \mid [1, 2, \cdots, k]$, where $n \mid [1, 2, \cdots, k]$ denote the least common multiples of $1, 2, \cdots, k$. Let $k \geqslant 2$ is a fixed integer, for each integer n, let $b_k(n)$ denotes the smallest integer such that $n \cdot b_k(n)$ is a perfect k-th power, $b_k(n)$ is called k-th power complement number of n. The main purpose of this paper is using the elementary methods and the analytic methods to study the mean square error of the composite function $SL(b_k(n))$ and the largest prime factor $P(n)$ of n, a sharper asymptotic formula is given.

Key Words: F. Smarandache *LCM* function; k-th power; mean value; asymptotic formula