关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差问题

赵院娥

(延安大学数学与计算机学院, 陕西 延安 716000)

摘 要: 利用初等及解析方法研究均方差 $\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2$ 的均值分布问题, 并获得了一个有趣的渐近公式.

关 键 词: Smarandache LCM 函数; 算术函数; 均方差; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2008)01-0071-04

1 引言及结论

对于任意正整数 n, 著名的 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 n 整除 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$, 其中 $[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示 $1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 的最小公倍数. 例如, $SL(n)$ 的前几项值是 $SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$, $SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $SL(8)=8$, $SL(9)=9$, $SL(10)=5$, $SL(11)=11$, $SL(12)=4$, $SL(13)=13$, $SL(14)=7$, $SL(15)=5$, $SL(16)=16,\cdots$. 由 $SL(n)$ 的定义我们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式, 那么

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_r^{\alpha_r}\} \tag{1}$$

关于 $SL(n)$ 的初等性质, 许多学者进行过研究, 取得了一系列有趣的结果, 参阅文 [1-5]. 例如, 文 [1] 证明了如果 n 是一个素数, 那么 $SL(n)=S(n)$, 其中 $S(n)$ 表示 Smarandache 函数, 即 $S(n)=\min\{m:\ n|m!,\ m\in\mathbf{N}\}$. 同时文 [1] 还提出了下面的问题

$$SL(n)=S(n),\quad S(n)\neq n\ ? \tag{2}$$

文 [2] 完全解决了这个问题. 文 [3] 研究了 $SL(n)$ 的均值问题, 证明了对任意给定的正整数 k 及任意实数 $x>2$ 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 c_i $(i=2,\ 3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

文 [4] 研究了 $SL(n)$ 与 Dirichlet 除数函数的混合均值, 给出了渐近公式

$$\sum_{n\leq x}d(n)\cdot SL(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$$

收稿日期: 2005-11-10.

基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).

作者简介: 赵院娥 (1972-), 女, 副教授, 研究方向: 数论与代数.

文 [5] 中还研究了 $[SL(n)-S(n)]^2$ 的均值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\le x}[SL(n)-S(n)]^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数, c_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ k)$ 是可计算的常数.

现在定义一个新的算术函数 $\overline{\Omega}(n)$ 如下: $\overline{\Omega}(1)=0$, 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时, 定义 $\overline{\Omega}(n)=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_kp_k$. 显然这个函数是可加函数. 即就是对任意正整数 m 及 n 有 $\overline{\Omega}(m\cdot n)=\overline{\Omega}(m)+\overline{\Omega}(n)$. 本文的主要目的是研究一类包含 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与 $\overline{\Omega}(n)$ 的均方差问题, 并给出一个有趣的渐近公式. 具体地说也就是证明下面的

定理 设 $k\ge 2$ 为给定的整数. 则对任意实数 $x\ge 2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2=\frac{4}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta- 函数, c_i $(i=2,\ 3,\cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

2 定理的证明

利用初等及解析方法直接给出定理的证明. 事实上在和式

$$\sum_{n\le x}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2 \tag{3}$$

中, 将所有 $1\le n\le x$ 分为四个子集合 A,B,C 和 D, 其中集合 A 包含区间 $[1,\ x]$ 中所有那些满足存在素数 p 使得 $p|n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 n; 而集合 B 包含区间 $[1,\ x]$ 中所有满足 $n=n_1p_1p_2$ 的那些正整数 n, 其中 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\sqrt{n}$; 集合 C 包含区间 $[1,\ x]$ 中所有满足 $n=n_1p^2$ 的那些正整数 n, 其中 $n^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{n}$; 集合 D 包含区间 $[1,\ x]$ 中所有不属于 A, B 和 C 的整数 n. 于是利用性质 (1) 及 A 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2 &= \sum_{\substack{n\le x\\ p|n,\ \sqrt{n}<p}}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2\\ &=\sum_{\substack{np\le x\\ n<p}}\left(p-p-\overline{\Omega}(n)\right)^2\\ &=\sum_{\substack{np\le x\\ n<p}}\overline{\Omega}^2(n)\ll\sum_{\substack{np\le x\\ n<p}}n^2\ll\frac{x^2}{\ln x}\end{aligned} \tag{4}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$. 于是利用 Abel 求和公式 (文 [6] 中定理 4.2) 及素数定理 (文 [7] 中定理 3.2)

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 c_i $(i=1,\ 2,\cdots,k)$ 为常数且 $c_1=1$.

于是有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in B}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{np_1p_2\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\sqrt{np_1p_2}}}\left(p_2-p_1-p_2-\overline{\Omega}(n)\right)^2\\
=&\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\ \sum_{n<p_1<\sqrt{\frac{x}{n}}}\ \sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1n}}\left(p_1+\overline{\Omega}(n)\right)^2\\
=&\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\ \sum_{n<p_1<\sqrt{\frac{x}{n}}}\ \sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1n}}\left[p_1^2+O\left(p_1x^{\frac{1}{3}}\right)\right]\\
=&\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\ \sum_{n<p_1<\sqrt{\frac{x}{n}}}\ \sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1n}}p_1^2+O\left(\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}\right)\ll\frac{x^2}{\ln^2 x}
\end{aligned}\tag{5}$$

$$\sum_{n\in C}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2\tag{6}$$

$$\begin{aligned}
=&\sum_{\substack{np_1^2\le x\\ n<p_1}}\left(p_1^2-2p_1-\overline{\Omega}(n)\right)^2\\
=&\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\ \sum_{n<p<\sqrt{\frac{x}{n}}}\left[p^4+O\left(p^3\right)+O\left(p^2n\right)\right]\\
=&\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\ \sum_{n<p<\sqrt{\frac{x}{n}}}p^4+O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)
\end{aligned}\tag{7}$$

应用 Abel 恒等式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n<p\le\sqrt{\frac{x}{n}}}p^4&=\frac{x^2}{n^2}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-n^4\cdot\pi(n)-\int_n^{\sqrt{\frac{x}{n}}}3y^3\pi(y)\mathrm{d}y\\
&=\frac{4}{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot\ln^i n}{n^{\frac{5}{2}}\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}\cdot\ln^{k+1}x}\right)
\end{aligned}\tag{8}$$

其中 a_i 为可计算的常数. 于是注意到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}=\zeta\left(\frac{5}{2}\right)$ 及 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^i n}{n^{\frac{5}{2}}}$ 收敛, 结合 (6) 及 (7) 式可得

$$\sum_{n\in C}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2=\frac{4}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\tag{9}$$

其中 b_i 为可计算的常数.

现在讨论集合 D 中的情况, 由 (1) 式及集合 D 的定义知对任意 $n \in D$, 如果 $SL(n) = p$, 是一个素数, 则 $p \le \sqrt{n}$; 如果 $SL(n) = p^2$ 则 $p \le n^{\frac{1}{3}}$; 或者 $SL(n) = p^{\alpha}$, $\alpha \ge 3$. 无论哪一种情况都有

$$\sum_{n\in D}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2 \ll \sum_{np\le x}\sqrt{np}+\sum_{\substack{np^2\le x\\ p\le n}}p^4+\sum_{\substack{np^{\alpha}\le x\\ \alpha\ge 3}}p^{2\alpha} \ll x^{\frac{7}{3}} \tag{10}$$

于是结合 (4), (5), (8) 及 (9) 式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2 &= \sum_{n\in A}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2+\sum_{n\in B}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2+\\ &\quad \sum_{n\in C}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2+\sum_{n\in D}\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2\\ &= \frac{4}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}$$

其中 b_i $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数. 于是完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[2] Le Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function [J]. Smarandache Notions Journal,2004, 14: 186-188.

[3] Lü Zhongtian. On the F.Smarandache LCM function and its mean value [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1):22-25.

[4] 吕国亮. 关于 F.Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3), 101-105.

[5] Ge Jian. Mean value of F.Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-112.

[6] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[7] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

On the mean square error of the Smarandache LCM function

ZHAO Yuan-e

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the mean value properties of the mean square error $\left(SL(n)-\overline{\Omega}(n)\right)^2$, and give an interesting asymptotic formula for it

Keywords: Smarandache LCM function, arithmetical function, mean square error, asymptotic formula.

2000MSC: 11M06