DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2013.04.035

第 31 卷 第 4 期
2013 年 4 月
河 南 科 学
HENAN SCIENCE
Vol.31 No.4
Apr. 2013

文章编号：1004-3918（2013）04-0422-03

关于 Smarandache LCM 函数的均方差问题

李 波，郭金保，彭 娟

（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要：利用初等以及解析的方法研究 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与数论函数 $SM(n)$ 的均方差均值分布问题，并给出一个较强的渐近公式.

关键词：F. Smarandache LCM 函数；均方差；均值；渐近公式

中图分类号：O 156.4 文献标识码：A

On the Average Variance of the Smarandache LCM Function

Li Bo, Guo Jinbao, Peng Juan

（College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi China）

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the average variance mean value problem involving the F. Smarandache LCM function $SL(n)$ and a number theory function $SM(n)$, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: F. Smarandache LCM function; the average variance; the mean value; Asymptotic formula

1 引言及结论

对于 $\forall n\in N$，著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 是由美籍罗马尼亚的数论专家 F. Smarandache 教授在文献[1]中引入的，定义为最小的正整数 k，使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$，即 $SL(n)=\min\{k: k\in N, n\mid[1,2,\cdots,k]\}$，其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数．例如 $SL(1)=1$，$SL(2)=2$，$SL(3)=3$，$SL(4)=4$，$SL(5)=5$，$SL(6)=3$，$SL(7)=7$，$SL(8)=8$，$SL(9)=9$，$SL(10)=5$，$\cdots$．当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 时，由 $SL(n)$ 的定义很容易推出

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}. \tag{1}$$

对于 $SL(n)$ 的初等性质，许多学者进行了研究，并获得了一系列有价值的研究成果．例如吕国亮在文献[2]中研究了 F. Smarandache LCM 函数与除数函数的加权均值，并得出了渐近公式

$$\sum_{n\le x}SL(n)\cdot d(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{C_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right).$$

此外，赵院娥在文献[3]中研究了均方值 $(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2$ 的渐近性质，给出了渐近公式

$$\sum_{n\le x}(SL(n)-\overline{\Omega}(n))^2=\frac{4}{5}\zeta\left(\frac{5}{4}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

对任意的正整数 n，数论函数 $SM(n)$ 的定义为：当 $n=1$ 时，$SM(1)=1$；当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标

收稿日期：2013-04-09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10901128）
作者简介：李 波（1986-），男，陕西榆林人，硕士研究生，从事数论方面的研究工作；
郭金保（1953-），男，陕西府谷人，教授，硕士研究生导师，主要从事数论、代数方面的研究.

准分解式时，$SM(n)=\max\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\cdots,\alpha_rp_r\}$，容易验证函数 $SM(n)$ 是 Smarandache 可乘函数．本文利用分类讨论的思想研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与数论函数 $SM(n)$ 的均方差问题，并且得到了一个较强的渐近公式．

定理　设 $k\geq 2$ 为给定的整数，则对 $\forall x\in R$，$x\geq 2$，有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(SL(n)-SM(n))^2=\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_ix^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数，$\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数．

2　定理证明

为了证明定理我们将所有 $1\leq n\leq x$ 的正整数 n 分为四个子集合 A，B，C 和 D，其中集合 A 满足存在素数 p，使得 $p|n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 n；集合 B 满足 $n=n_1p_1p_2$，且 $\sqrt[3]{n}<p_1<p_2\leq\sqrt{n}$ 的正整数 n；集合 C 满足 $n=n_1p^2$ 的正整数 n，其中 $\sqrt[3]{n}<p\leq\sqrt{n}$；集合 D 在区间 $[1,x]$ 中满足所有不属于集合 A，B，C 的正整数 n．利用(1)式性质以及集合A 的定义可知，当 $n\in A$ 有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}(SL(n)-SM(n))^2=\sum_{\substack{n\leq x\\ p|n,\sqrt{n}<p}}(SL(n)-SM(n))^2=\sum_{\substack{np\leq x\\ n<p}}(p-p)^2=0. \tag{2}$$

当 $n\in B$ 时，即 $n=n_1p_1p_2$ 时有：

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}(SL(n)-SM(n))^2=\sum_{\substack{\sqrt[3]{n}<p_1<p_2\leq\sqrt{np_1p_2}\\ np_1p_2\leq x}}(p_2-p_2)^2=0. \tag{3}$$

当 $n\in C$，即 $n=n_1p^2$ 时有：

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in C}}(SL(n)-SM(n))^2=\sum_{\substack{np_1^2\leq x\\ n<p_1}}(p_1^2-2p_1)^2=\sum_{n\leq\sqrt[3]{x}}\ \sum_{n<p<\sqrt{\frac{x}{n}}}(p^4-4p^3+4p^2).$$

利用 Abel 求和公式以及素数定理 $\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$[4]，其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数，由此可以得到

$$\sum_{n<p\leq\sqrt{\frac{x}{n}}}p^4=\frac{x^2}{n^2}\pi\left(\sqrt{\frac{x}{p}}\right)-\int_n^{\sqrt{\frac{x}{n}}}4y^3\pi(y)\,\mathrm{d}y=\frac{2}{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_ix^{\frac{5}{2}}\ln^i n}{n^{\frac{5}{2}}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}\ln^{k+1}x}\right).$$

此处 a_i 为可计算的常数．同时又注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}=\zeta\left(\frac{5}{2}\right)$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^i n}{n^{\frac{5}{2}}}$ 收敛，由此可得

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in C}}(SL(n)-SM(n))^2=\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_ix^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right). \tag{4}$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数，$\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数．

现在讨论集合 D 的情形，主要分为三种情况：当 $SL(n)=p$，那么有 $p\leq\sqrt{n}$；当 $SL(n)=p^2$，则 $p\leq n^{\frac{1}{3}}$ 或者 $SL(n)=p^\alpha$，$\alpha\geq 3$．无论哪一种情况都有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in D}}(SL(n)-SM(n))^2<<\sum_{np\leq x}\sqrt{np}+\sum_{\substack{np^2\leq x\\ p\leq n}}p^4+\sum_{\substack{np^\alpha\leq x\\ \alpha\geq 3}}p^{2\alpha}<<x^{\frac{7}{3}}. \tag{5}$$

结合(2)～(5)式,可得

$$\sum_{n\leqslant x}\left(SL(n)-SM(n)\right)^2=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\left(SL(n)-SM(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\left(SL(n)-SM(n)\right)^2+$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}\left(SL(n)-SM(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}\left(SL(n)-SM(n)\right)^2=$$

$$\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数. 于是定理得证.

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems,not solutions[M]. Chicago:Xiquan Publishing House,1993.

[2] 吕国亮. 关于 F.Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3):315-318.

[3] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差问题[J]. 纯粹数学与应用数学,2008,24(1):71-74.

[4] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的证明[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.

(编辑　张松林)