doi: 10. 3969/j. issn. 1003-4271. 2013. 04. 20

关于 Smarandache LCM 对偶函数的一个方程

闫天国[1]，王巧玲[2]，徐小凡[1]

(1. 四川大学数学学院, 成都 610064; 2. 西南交通大学数学学院, 成都 610031)

摘 要: 对任意的正整数 n , Smarandache LCM 对偶函数 $SL^*(n)$ 定义为最大的正整数 k ,使得 $lcm(1,2,\cdots,k)$ 整除 n ,其中 $lcm(1,2,\cdots,k)$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数. 本文的主要目的是运用初等及解析方法研究 $SL^*(n)$ 方程的可解性, 最后给出了方程的所有正整数解.

关键词: Smarandache LCM 对偶函数; 可解性; 正整数解

中图分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1003-4271(2013)04-0570-05

1 引言

对任意正整数 n , 罗马尼亚著名数论学家 J. Sandor 在文献**[1]**中定义了以下几个重要的数论函数

Smarandache 函数 : $S(n)=\min\{k:n\mid k!,k\in N^*\}$

Smarandache 对偶函数 : $S^*(n)=\max\{k:k!\mid n,k\in N^*\}$

Smarandache LCM 函数 : $SL(n)=\min\{k:n\mid lcm(1,2,3\ldots k),k\in N^*\}$

Smarandache LCM 对偶函数 : $SL^*(n)=\max\{k:lcm(1,2,3\ldots k)\mid n,k\in N^*\}$

关于Smarandache及其相关函数,有很多学者进行过研究,并且获得了许多重要的结果. 例如马金萍在文献**[2]**中研究了包含 Smarandache 函数的方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=n$ 的正整数解, 即对任意的正整数 n , $\sum_{d\mid n}S(d)=n$ 成立当且仅当 $n=1,28$. 薛西峰教授在文献**[3]**中研究了方程 $\sum_{d\mid n}S^*(d)=n$ 的正整数解, 即对任意的正整数 n , $\sum_{d\mid n}S^*(d)=n$ 成立当且仅当 $n=1,12$. 贺艳峰博士在文献**[4]**中研究了方程 $\sum_{d\mid n}SL(d)=n$ 的正整数解, 得到了对任意的正整数 n ,

$$\sum_{d\mid n}SL(d)=n \qquad \text{成立当且仅当 } n=1,28 .$$

本文的主要目的是运用初等及解析方法研究 $\sum_{d\mid n}SL^*(d)=n$ 的可解性, 探寻解的结构, 并最终证明了如下定理.

定理: 对任意的正整数 n , 方程 $\sum_{d\mid n}SL^*(d)=n$ 成立当且仅当 $n=1$.

2 预备知识

由 Smarandache LC[1]M 对偶函数的定义知

收稿日期：2013-04-02

作者简介：闫天国(1983-), 男, 四川三台人, 硕士研究生, 研究方向信息安全. Email:ytguo3062002@qq.com.

$$SL^*(1)=1, SL^*(2)=2, SL^*(3)=1, SL^*(4)=2, SL^*(5)=1,$$
$$SL^*(6)=3, SL^*(7)=1, SL^*(8)=2, SL^*(9)=1,\ldots$$

为证明定理给出以下几个引理

引理 1: (1)当 $n\in N^*, n\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$ 时，$SL^*(n)=1$，

当 $n\in N^*, n\equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$时，$SL^*(n)\ge 2$；

(2)当 $n\in N^*, n=2^2\cdot m, 3\nmid m$ 时，$SL^*(n)=2$；

(3)当 $n\in N^*, n=2\cdot 3\cdot m, 2\nmid m$ 时，$SL^*(2\cdot 3\cdot m)=3$；

(4)当 $n\in N^*, n=2^2\cdot 3\cdot m, 5\nmid m$ 时，$SL^*(2^2\cdot 3\cdot m)=4$；

(5)当 $n\in N^*, n=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot m, 7\nmid m$ 时，$SL^*(2^2\cdot 3\cdot 5\cdot m)=6$.

结论根据定义计算,结果显然可得.

引理 2: 方程 $\sum_{d|n} SL^*(d)=n$ 没有形如 $n=p^\alpha$ 的正整数解，其中 p 为素数，α 为任意正整数.

证明: (i)当 $p=2$，即 $n=2^\alpha$ 时，据引理 1

$$\sum_{d|n} SL^*(d)=SL^*(1)+SL^*(2)+SL^*(2^2)+\ldots SL^*(2^\alpha)=$$

$1+2\alpha=2^\alpha$，矛盾(因为等式两端在模 2 时不同余)

(ii)当 p 为奇素数时，知 $n=p^\alpha$ 为奇数，据引理 1

$$\sum_{d|n} SL^*(d)=SL^*(1)+SL^*(p)+SL^*(p^2)+\ldots SL^*(p^\alpha)=$$

$\alpha+1=p^\alpha$，矛盾(因为 $p^\alpha\ge 3^\alpha\ge 1+2\alpha>1+\alpha$).

引理 3: 当 $n\ge 8$ 时 $\frac{n}{d(n)}\ge 2$，其中 $d(n)$ 为除数函数，$d(n)$ 表示 n 的正因子数的个数.

证明见文献[3]

引理 4: 对 $m>45$ 时，有 $m>4d(m)$.

证明: 设 $m=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_n^{r_n}$，则 $d(m)=(r_1+1)(r_2+1)\ldots(r_n+1)$.

需证明 $$p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_n^{r_n}>4(r_1+1)(r_2+1)\ldots(r_n+1)\quad. \tag{1}$$

现在对 n 分情形讨论

(i) 若 $n\ge 4$，证明(1)式无条件成立. 由于函数 $f(r)=p^r/(r+1)$ 对正整数自变量 r 单调增,故只需对每个 r_i 都是 1 成立即可，经检查此时(1)式无条件成立(对最小四个素数检查即可) .

(ii)若 $\mathrm{n}=3$，用同样方法可知除了取 3 个素因子 $2,3,5$ 时,(1)式无条件成立. 当 $m=2^{r_1}\times 3^{r_2}\times 5^{r_3}$ 时可验证 r_i 中一个取 2,其它两个取 1 时(1)式成立. 但条件 $m>45$ 要求 r_i 中至少有一个 >1,故由函数 $f(r)=p^r/(r+1)$ 的单调增性知(1)式成立.

(iii)若 $n=2$, $m=p_1^{r_1}\times p_2^{r_2}$, $p_1<p_2$,若 $p_2\ge 11$,则 $p_2>4(1+1)$,(1)式显然成立；可设 $p_2\le 7$,如果 m 有一个素数幂因子为 p^r，$p\ge 3, r\ge 3$，则 $p^r/(r+1)\ge 3^3/(3+1)>4$,故(1)式成立. 注意到事实:要使 $4(r_1+1)(r_2+1)\ge 45$，需要至少一个 $r_i\ge 3$. 到此,只剩下 $m=2^r p, 2^r p^2, p=3,5,7$ 的情形. 当 $m=2^r p^2$ 时,若

$p \ge 5$,直接验证知 $p^2 > 4\times(2+1)$,可知(1)式成立;若 $p=3$,条件 $m>45$ 要求 $r\ge 3$,此时也可验证(1)式成立. 最后若 $m=2^r p, p=3,5,7$,简单验证可知在 $m>45$ 时,(1)式成立.

(iv)当 $n=1$ 时, $m=p_1^{r_1}>45$, $4(r+1)<45$ 时不需证,当 $4(r+1)\ge 45$ 时, $r>10$,此时不等式(1)成立显然.

综上所述,当 $m>45$ 时, $m>4d(m)$ 成立, 证毕 .

关于 Smarandache 对偶函数的相关性质,许多学者也进行了相关研究,并且取到了一些有价值的相关成果,参阅文献**[5-6]**, 本文在证明过程中使用到一些数论的基本知识,参阅文献**[7-8]**.

3 主要结果

定理: 对任意的正整数 n, 方程 $\sum_{d|n} SL^*(d)=n$ 成立当且仅当 $n=1$.

证明: 当 $n=1$ 时, $\sum_{d|n} SL^*(d)=SL^*(1)=1$ 成立, 故 $n=1$ 为方程的正整数解.

下证当 $n\ge 2$ 时, $\sum_{d|n} SL^*(d)=n$ 无正整数解.

(i) 当 $2\nmid n$ 时, 即 n 为奇数, $\because d\,|\,n, \therefore 2\nmid d$ 故 $SL^*(d)=1$

$$\therefore \sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|n} 1=d(n)=n \text{ 矛盾(因为 } n\ge 3 \text{ 时, } n>d(n)\text{).}$$

当 $2\,|\,n$ 时, 对 n 进行分类证明

(ii) 当 $n=2\cdot m$ 时, m 为奇数,

a. 当 $3\nmid m$ 时, $\because d\,|\,m \therefore 3\nmid d \Rightarrow SL^*(2d)=2$,

$$\sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)=\sum_{d|m}1+\sum_{d|m}2=3d(m)=2m \text{ 矛盾}$$

(因为当 $m\ge 5$ 时, $\frac{m}{d(m)}\ge\frac{3}{2}$),

验证 $m=1$, 得 $\sum_{d|2} SL^*(d)=SL^*(1)+SL^*(2)=3\ne 2$, 故方程无正整数解

b. 当 $3\,|\,m$ 时, 知 $\sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)<d(m)+\sum_{d|m}3=4d(m)$,

当 $m\ge 8$ 时 $2m<4d(m)$ 矛盾. (由引理 3)

验证 $m=3$, $\sum_{d|6} SL^*(d)=SL^*(1)+SL^*(2)+SL^*(3)+SL^*(6)=7\ne 6$.

故此时方程无正整数解

(iii) 当 $n=2^2\cdot m$ 时, m 为奇数

a. 当 $3\nmid m$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} SL^*(d)&=\sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)+\sum_{d|m} SL^*(4d)\\ &=d(m)+2d(m)+2d(m) \qquad \text{(由引理 1)}\\ &=5d(m)=4m\text{,矛盾(因为 } m\ge 3\text{, } \frac{m}{d(m)}\ge\frac{5}{4}\text{).}\end{aligned}$$

验证 $m=1$, $\sum_{d|4} SL^*(d) = SL^*(1)+SL^*(2)+SL^*(4)=5\neq 4$,方程无正整数解

b. 当 $3|m$, $5\nmid m$ 时,

$$\sum_{d|n} SL^*(d) = \sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)+\sum_{d|m} SL^*(4d) < \sum_{d|m}1+\sum_{d|m}3+\sum_{d|m}4 = 8d(m),$$

$4m<8d(m)$ 矛盾.　(由引理 3)

验证当 $m=3$ 时 , $\sum_{d|12} SL^*(d) = SL^*(1)+SL^*(2)+SL^*(3)+SL^*(4)+SL^*(6)+SL^*(12)=13\neq 12$

c. 当 $3|m$, $5|m$ 时 , $\sum_{d|n} SL^*(d) = \sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)+\sum_{d|m} SL^*(4d) \le \sum_{d|m}1+\sum_{d|m}3+\sum_{d|m}7 = 11d(m)$

得 $4m\le 11d(m)$,当 $m\ge 15$ 时矛盾

(iv) 当 $n=2^\alpha\cdot m$时, m 为奇数, 设 $\alpha\ge 3$

a. 当 $3\nmid m$ 时,

$$\sum_{d|n} SL^*(d) = \sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)+\sum_{d|m} SL^*(2^2d)+\ldots\sum_{d|m} SL^*(2^\alpha d)$$

$$=(1+2\alpha)d(m)\ .$$

(由引理 1 中(2))

故 $2^\alpha\cdot m<(1+2\alpha)d(m)$ 矛盾(因为 $m\ge d(m), \alpha\ge 3$ 时, $\frac{m}{d(m)}\cdot\frac{2^\alpha}{1+2\alpha}>1$).

b. 当 $3|m$, $5\nmid m$ 时,

$$\sum_{d|n} SL^*(d) = \sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)+\sum_{d|m} SL^*(2^2d)+\ldots\sum_{d|m} SL^*(2^\alpha d) <$$

$$(1+3+4+\ldots 4)\cdot d(m) = 4\alpha\cdot d(m)\ .$$

故 $2^\alpha m<4\cdot\alpha\cdot d(m)$ 矛盾(因为 $\frac{2^\alpha\cdot m}{4\alpha\cdot d(m)} = \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha}\cdot\frac{m}{d(m)}>1$).

c. 当 $3|m$, $5|m$ 时,

$$\sum_{d|n} SL^*(d) = \sum_{d|m} SL^*(d)+\sum_{d|m} SL^*(2d)+\sum_{d|m} SL^*(2^2d)+\ldots\sum_{d|m} SL^*(2^\alpha d) \le$$

$$d(m)+3d(m)+8d(m)+\ldots 2^{\alpha+1}d(m)-(\alpha-1)d(m) < 4\cdot 2^\alpha d(m)\ .$$

故 $2^\alpha m<4\cdot 2^\alpha d(m)$ 矛盾　(由引理 4)

由(i)(ii)(iii)(iv)则完成了定理的证明.

4　结束语

本文对 Smarandache LCM 对偶函数方程 $\sum_{d|n} SL^*(d)=n$ 的解进行了探索, 解决了方程的正整数解情况, 为研究 Smarandache LCM 对偶函数方程的解做出了一部分工作.

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problem,Not Solution[M]. Chicago: Xiquan publishing House,1993.

[2] MA J P. An Equation Involving the Smarandache Function[J]. Chinese Series, 2007(6): 1185-1190.

[3] XUE XI FENG. Solutions of an equation involving the Smarandache dual Function[J]. Journal of Shan xi Normal University, 2007(1): 9-11.

[4] 贺艳锋, 潘晓玮. 一个包含 Smarandache LCM 函数的方程[J]. 数学学报: 中文版, 2008(4): 776-779.

[5] 赵教练. 段卫国. 关于 Smarandache 对偶函数的相关均值[J]. 科学技术与工程,2008,1255-1266.
[6] LEMAO-HUA. Two function equations [J]. SmarandacheNotions Journal, 2004, 14: 180-182.
[7] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京:北京大学出版社, 2001.
[8] 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1995.

致谢
本文在撰写过程中，始终得到我的导师张起帆教授的精心指导和耐心帮助，在此对张教授对我的关爱和付出表示衷心地感谢.

An equation of Smarandache LCM dual function

YAN Tian-guo[1], WANG Qiao-ling[2], XU Xiao-fan[1]

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R.C.; 2. Southwest Jiaotong Univetsity, Chengdu 610031, P.R.C.)

Abstract: For any positive integer, the Smarandache LCM dual function $SL^*(n)$ is defined as the largest positive integer k such that $lcm(1,2,\ldots,k)\,|\,n$, where $lcm(1,2,\ldots,k)$ denotes the least common multiple of $1,2,\ldots,k$. The main purpose of this paper is to use the elementary and analytical methods to search the solutions of an equation involving the $SL^*(n)$. All its positive integer solutions are given.

Key words: Smarandache LCM dual function; solvability; positive integer solution