关于 Smarandache-Reimann Zeta序列

乐 茂 华
(湛江师范学院 数学系,广东 湛江 524048)

摘要: 本文证明了 Smarandache-Reimann Zeta序列不是整数序列,而且该序列中的任何两个整数项都不是互素的.

关键词: Reimann Zeta函数; Bernoulli数;互素
中图分类号: O156　　文献标识码: A　　文章编号: 1003-8078(2004)03-0010-01

On the Smarandache-Reimann Zeta sequence

LE Mao-hua
(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, Guangdong, China)

Abstract In this paper we prove that the Smarandache-Reimann Zeta sequence is not a sequence of integers, and any two integer terms of this sequence are not relatively prime.

Key words Reimann Zeta function; Bernoulli number; relatively prime

对于复数 s,

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s} \tag{1}$$

称为 Riemann Zeta函数.对于正整数 n,设 T_n 适合

$$\zeta(2n)=\frac{\pi^{2n}}{T_n} \tag{2}$$

其中 π 是圆周率.此时,序列 $T=\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 Smarandache-Rmeiann Zeta序列.对此,Murthy[1]认为 T 是整数序列,并且提出以下猜想:

猜想　T 中任意两项都不互素.

对于正整数 a 以及素数 p,设 $\mathrm{ord}(p,a)$ 是 p 在 a 中的次数.本文证明了:

定理 1　当 $\mathrm{ord}(2,(2n)!)<2n-2$ 时,T_n 不是整数.

定理 2　T 中任意两个整数项必定不能互素.

因为 $\mathrm{ord}(2,14)=11<12=2\cdot 7-2$,所以根据定理 1可知 T 不是整数序列.然而,根据定理 2可知 T 中的整数项都满足 Murthy的猜想.

定理 1的证明　设 B_{2n} 是第 $2n$ 个 Bernoulli数.根据文献 [2]的命题 2.5.3可知

$$\zeta(2n)=(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}B_{2n} \tag{3}$$

因为由 Von Staudt定理(参见文献 [3])可知　(下转第 13页)

收稿日期: 2004-03-20.
作者简介: 乐茂华,男,上海市人,教授,主要从事数论方向的研究.
基金项目: 国家自然科学基金项目(10271104);广东省自然科学基金项目(011781);广东省教育厅自然科学研究项目(0161);湛江市 988科技兴湛计划项目.

非振动的.

例 **2** 对任意正整数 k,方程

$$x''+(x^{2k}\cos t)x'+\frac{1}{n+1}(1+2kx^{2k-1}x'\cos t-x^{2k}\sin t)x=0$$

是振动的,其中 n 满足定理 2的条件.

取 $Q(t)=-\sin t$, 容易计算

$$\frac{1}{n+1}[pQ'(t)-rQ(t)]'=\frac{1}{n+1}x^{2k}\cos^2 t+q\sin t$$

于是

$$I=\frac{1}{n+1}[pQ'(t)-rQ(t)]'+qQ(t)=\frac{1}{n+1}x^{2k}\cos^2 t\geqslant 0$$

由定理 2知方程振动.

参考文献:

[1] 程崇高,林诗仲.二阶微分方程振动与非振动的充分条件[J].海南师范学院学报(自), 2003, 16(1): 1~4.
[2] 程崇高.二阶线性齐次方程解的零点比较定理[J].数学杂志, 1996, 16(4): 437~440.
[3] 邓宗琦.常微分方程边值问题和 Sturm比较理论引论(第 2版)[M].武汉: 华中师范大学出版社, 1990.
[4] Kreith K. Oscillation theory[M]. New York: Springe-Verlag, 1973.
[5] Graef J R, Spikes P W. Comparison and Nonoscillation Resule for perturbed Nonlinear Differential Equations[J]. Ann Mat pure Appl, 1978, 116: 135~142.

(上接第 10页)

$$B_{2n}=(-1)^n\frac{a_n}{b_n} \tag{4}$$

其中 a_n、b_n 是适合

$$\gcd(a_n,b_n)=1, b_n\equiv 2(\bmod 4), b_n\equiv 0(\bmod 3) \tag{5}$$

的正整数.从(2),(3)和(4)可知

$$T_n=\frac{(2n)!\,b_n}{2^{2n-1}a_n} \tag{6}$$

由于从(5)可知 b_n 是偶数,而且 $\gcd(a_n,b_n)=1$,所以 a_n 必为奇数.因此,从(6)可知: 当 $\mathrm{ord}(2,(2n)!)<2n-2$时, T_n 不是整数.由此可知 T不是整数序列.定理证完.

定理 **2**的证明 设 T_m 和 T_n 是 T 中的两个整数项,从定理 1的证明过程可知 T_n 和 T_m 分别适合(6)和

$$T_m=\frac{(2m)!\,b_m}{2^{2m-1}a_m}, \tag{7}$$

其中 a_m、b_m 适合

$$\gcd(a_m,b_m)=1, b_m\equiv 2(\bmod 4), b_m\equiv 0(\bmod 3) \tag{8}$$

的正整数.根据(5),(6),(7)和(8)可知 T_m 和 T_n 有公因数 3.由此可知 T_m 和 T_n 不是互素.定理证完.

参考文献:

[1] Murthy A. Some more conjectures on primes and divisors[J]. Smarandache Notions J, 2001, 12: 311~312.
[2] 屠规彰.组合计数方法及其应用[M].北京: 科学出版社, 1981.
[3] Von Staudt C. Beweis eines lehratzes, die bernoullischen zahlen[J]. J Reine Angew Math, 1840, 21: 372~376.