关于Smarandache-Type可乘函数的方程

张小蹦 [1,2]， 田清 [2]

(1.西安邮电学院应用数理系, 陕西 西安 710121; 2.西北大学数学系, 陕西 西安 710127)

摘要：研究了一类包含Smarandache-Type可乘函数$F_k(n)$与$G_k(n)$的无穷级数及其算术性质, 并利用初等方法及欧拉积公式得到了该级数的两个有趣的恒等式,从而推广了关于Smarandache-Type可乘函数的算术性质.

关键词：Smarandache-Type 可乘函数; 无穷级数; 恒等式

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2009)03-0478-03

1 引言

在文[1]中, Smarandache-Type 可乘函数$F_k(n)$ 和$G_k(n)$ 定义如下: 对于任意固定的正整数n,其标准分解式为$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $(1 \le i \le k)$ 我们有

$$F_k(p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} 1, & \text{如果}\alpha_i = kr \\ p_i^k, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{以及 } G_k(p_i^{\alpha_i}) = \begin{cases} 1, & \text{如果}\alpha_i = kr \\ p_i, & \text{其他} \end{cases}$$

显然$F_k(n)$ 和$G_k(n)$ 都是可乘函数. 另外,对于任意固定的正整数k和n, Smarandache ceil 函数$S_k(n)$ 是指

$$S_k(n) = \min\{m \in \mathbb{N} : n \mid m^k\}$$

关于这个函数, 许多人研究了它的均值性质[2-3,6], 如文[2]作者研究了Smarandache ceil 函数的算术性质,并得到了下面的关系式

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}) \quad (a, b) = 1 \Rightarrow S_k(a \cdot b) = S_k(a) \cdot S_k(b)$$

以及$S_k(p^\alpha) = p^{\lceil \frac{\alpha}{k} \rceil}$, 此处$p$为素数, $\lceil x \rceil$表示大于x的最小整数.事实上, $S_k(n)$ 是一个可乘函数.因此,如果$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 是n的素因子分解式, 我们就可以得到

$$S_k(n) = S_k(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = p_1^{\lceil \frac{\alpha_1}{k} \rceil} \cdots p_r^{\lceil \frac{\alpha_r}{k} \rceil}$$

此外，对于任意的正整数n, Smarandache k次幂剩余$a_k(n)$ 是指满足$na_k(n)$为一个完全k次幂的最小正整数. 即

$$a_k(n) = \min\{l \mid n \cdot l = m^k, l \ge 0, m \in \mathbb{N}^+\}$$

从$a_k(n)$的定义中, 我们发现$a_k(n)$仍是一个可乘函数. 设A 表示满足方程$S_k(n) = a_k(n)$的所有正整数n的集合. 即$A = \{n \in \mathbb{N}, S_k(n) = a_k(n)\}$. 目前, 有许多关于Smarandache ceil函

收稿日期：2008-09-14.

基金项目：陕西省教育厅专项科研计划项目(08JK437),西安邮电学院中青年科研基金(105-0449).

作者简介：张小蹦(1978-),助教, 研究方向：数论及其应用.

数以及Smarandache k次幂剩余函数的均值性质[5], 但对于Smarandache-Type可乘函数的研究比较少见. 本文的主要目的是利用初等方法及欧拉积公式研究了无穷级数$\sum_{n=1,n\in A}^{\infty}\frac{F_k(n)}{n^s}$和$\sum_{n=1,n\in A}^{\infty}\frac{G_k(n)}{n^s}$的算术性质, 并且得到了两个有趣的恒等式.

具体地说,也就是证明下面的两个结论:

定理 1 设k 是一个大于等于2的正整数. 则对于任意的实数$s>1$, 有

$$\sum_{\substack{n=1\\n\in A}}^{\infty}\frac{F_k(n)}{n^s}=\frac{\zeta\left((k-1)s\right)}{\zeta\left((k^2-1)s\right)}\prod_p\left(1+\frac{(1-p^k)(p^{(ks-k^2s)}-1)}{p^{(k-1)s}-p^{(ks-k^2s)}}\right)$$

其中$\zeta(s)$表示Riemann-zeta函数.

定理 2 设k 是一个大于等于2的正整数. 则对于任意的实数$s>1$, 有

$$\sum_{\substack{n=1\\n\in A}}^{\infty}\frac{G_k(n)}{n^s}=\frac{\zeta\left((k-1)s\right)}{\zeta\left((k^2-1)s\right)}\prod_p\left(1+\frac{(1-p)(p^{(ks-k^2s)}-1)}{p^{(k-1)s}-p^{(ks-k^2s)}}\right)$$

其中$\zeta(s)$ 表示Riemann-zeta函数.

2 定理的证明

我们直接给出定理的证明. 首先, 定义算术函数$B(n)$为

$$B(n)=\begin{cases}1, & \text{如果}n\in A\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为n的标准分解式.由于$S_k(n)$ 和$a_k(n)$ 都是可乘函数, 因此对于函数方程$S_k(n)=a_k(n)$成立所满足的正整数n, 只需要讨论当$n=p^i$时的情况.

如果$i=lk+n,\quad (l\geq 0,\ \ 0\leq n<k)$, 很容易得到

$$S_k(p^i)=p^{\lceil\frac{i}{k}\rceil}=\begin{cases}p^l, & \text{如果}n=0\\ p^{l+1}, & \text{如果}0<n<k\end{cases}\quad \text{及}\ a_k(p^i)=\begin{cases}1, & \text{如果}n=0\\ p^{k-n}, & \text{如果}0<n<k\end{cases}$$

因此要使得方程$S_k(p^i)=a_k(p^i)$成立,当且仅当$l+1=k-n$. 即$n=k-l-1$, 也就是$i=lk+n=lk+k-l-1=(k-1)(l+1)$. 从而, $p^i=p^{(k-1)(l+1)}$, 其中$0\leq l\leq k-1$. 因此, 令$\mathrm{Re}(s)>1$, 利用欧拉积公式[4] 以及$F_k(n)$的可乘性质, 得到

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1\\n\in A}}^{\infty}\frac{F_k(n)}{n^s}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_k(n)B(n)}{n^s}\\
&=\prod_p\left(1+\frac{F_k(p)B(p)}{p^s}+\frac{F_k(p^2)B(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{F_k(p^k)B(p^k)}{p^{ks}}+\cdots\right)\\
&=\prod_p\left(1+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{F_k(p^{(k-1)(l+1)})B(p^{(k-1)(l+1)})}{p^{(k-1)(l+1)s}}\right)\\
&=\prod_p\left(1+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{p^k}{p^{(k-1)(l+1)s}}\right)=\prod_p\left(1+p^k\frac{1-p^{k(1-k)s}}{p^{(k-1)s}-1}\right)\\
&=\frac{\zeta\left((k-1)s\right)}{\zeta\left((k^2-1)s\right)}\prod_p\left(1+\frac{(1-p^k)(p^{(ks-k^2s)}-1)}{p^{(k-1)s}-p^{(ks-k^2s)}}\right)
\end{aligned}$$

利用同样的方法, 也可以得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=1\\ n\in A}}^{\infty}\frac{G_k(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_k(n)B(n)}{n^s}\\
&=\prod_p\left(1+\frac{G_k(p)B(p)}{p^s}+\frac{G_k(p^2)B(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{G_k(p^k)B(p^k)}{p^{ks}}+\cdots\right)\\
&=\prod_p\left(1+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{G_k(p^{(k-1)(l+1)})B(p^{(k-1)(l+1)})}{p^{(k-1)(l+1)s}}\right)\\
&=\prod_p\left(1+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{p}{p^{(k-1)(l+1)s}}\right)=\prod_p\left(1+p\frac{1-p^{k(1-k)s}}{p^{(k-1)s}-1}\right)\\
&=\frac{\zeta\left((k-1)s\right)}{\zeta\left((k^2-1)s\right)}\prod_p\left(1+\frac{(1-p)(p^{(ks-k^2s)}-1)}{p^{(k-1)s}-p^{(ks-k^2s)}}\right)
\end{aligned}
$$

于是完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Ibstedt Surfinig. On the Ocean of Number-a few Smarandache Notions and Similar Topics[M]. New Mexico: Erthus University Press, 1996.

[3] Sabin Tabirca, Tatiana Tabirca. Some new results concerning the Samarandache ceil function[J]. Smarandache notions Journal, 2002, 13:30-36.

[4] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[5] 易媛, 亢小玉. 关于Smarandache问题研究[M]. USA: High American Press, 2006.

[6] 苟素. 关于Smarandache ceil函数的一个方程[J]. 纯粹数学与应用数学, 2006,22(1):48-50.

Equations on the Smarandache-Type multiplicative function

ZHANG Xiao-beng [1,2], TIAN Qing [2]

(1.Department of Applied Mathematics and Physics, Xi'an University of Post and Telecommunications, Xi'an 710121, China; 2.Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary method and Euler product formula to study the properties of the infinity series involving the Smarandache-Type function, and obtain its two interesting identities. This generalized the properties of Smarandache-Type function.

Keywords: Smarandache-Type multiplicative function, infinity series, identity

2000MSC: 11B83