文章编号：1003-2843(2007)04-0713-05

关于 Smarandache ceil 函数及其对偶函数的均值

冯强, 郭金保

(延安大学数学与计算机科学学院, 陕西延安 716000)

摘要：用解析的方法来研究 k 阶 Smarandache ceil 函数及其对偶函数与 k 次幂补数的均值分布性质，并得出几个较为精确的渐近公式.

关键词：Smarandache Ceil 函数；k 次幂补数；均值；渐进公式

中图分类号: O156. 4 文献标识码: A

1 引言及结论

设 k≥2 为一固定的整数，n 为正整数，$c_k(n)$ 表示的次幂补数，即：

$$c_k(n)=\min\{m\in N:nm=t^k\}(t\in N).$$

对于给定的正数数 k，著名的 k 阶 Smarandache ceil 函数定义如下：

$$S_k(n)=\min\{x\in N:n\mid x^k\}(\forall n\in N^*).$$

类似的，对于给定的正整数 k 及正整数 n，著名的 k 阶 Smarandache ceil 函数的对偶数定义如下：

$$\overline{S}_k(n)=\max\{x\in N:x^k\mid n\}(\forall n\in N^*).$$

这几个函数都是 F. Smarandache 教授在文献[1]中提出的，已引起了许多学者浓厚的兴趣，并对之进行了研究[2-5]，本文利用解析的方法来研究 k 阶 Smarandache 函数及其对偶数与 k 次幂补数的均值分布性质，并得出几个较为精确的渐近公式.

定理 1 对任意实数 $x\geq 1,\ k,\ n\in N,\ k\geq 2$, 有：

$$\sum_{n\leq x}S_k(n)c_k(n)=\frac{6}{(k+1)\pi^2}x^{k+1}\zeta(k+2)\zeta(k^2+k-1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p+1)}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right)+O(x^{k+\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

定理 2 对任意实数 $x\geq 1,\ k,\ n\in N,\ k\geq 2$, 有：

$$\sum_{n\leq x}S_k(c_k(n))=\frac{3}{\pi^2}x^2\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^2-2)}R(2)\right)+O(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}),$$

其中

$$R(2)=1-\frac{1}{p^{2(k-2)}}+\left(p^2\left(1-\frac{1}{p^{2(k-1)}}\right)+p^3-p\right)\frac{1}{p^{2k-1}}.$$

定理 3 对任意实数 $x\geq 1,\ k,\ n\in N,\ k\geq 2$, 有：

$$\sum_{n\leq x}\overline{S}_k(n)c_k(n)=\frac{6}{k\pi^2}x^k\zeta(k+1)\zeta(k^2-1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{k^2-k-1}}-\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right)+O(x^{k-\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

收稿日期：2007-04-03

作者简介：冯强(1975-), 男, 延安大学数学与计算机科学学院讲师.

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271093)；陕西省自然科学基金资助项目(2004A09).

定理 4 对任意实数 $x \ge 1$, k, $n \in N$, $k \ge 2$, 有

$$\sum_{n \le x} \overline{S}_k(c_k(n)) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

2 一个简单的引理

为了完成定理的证明，先叙述一个引理，即著名的 Perron 公式[6]

引理 1

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}, \qquad \sigma_a < +\infty,$$

再设存在递增函数 H(u)及函数 B(u)使得

$$|a(n)| \le H(n), \sum_{n-1}^{\infty} |a(n)| n^{-\sigma} \le B(\sigma), \sigma > \sigma_a, n = 1,2,3\cdots.$$

则对任意的 $s_0 = \sigma_0 + it_0$ 及 $b_0 > \sigma_{a,}$，当 $b_0 \ge b > 0, b_0 \ge \sigma_0 + b > \sigma_a, T \ge 1$ 及 $x \ge 1$ 时，有

(1) $x \ne$ 正整数时，

$$\sum_{n \le x} a(n) n^{-s_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} A(s_0 + s) \frac{x^s}{s} ds + \left(\frac{x^b B(b + \sigma_0)}{T} \right)$$

$$+ O\left(x^{1-\sigma_0} H(2x) \min\left(1, \frac{\log x}{T}\right) \right) + O\left(x^{-\sigma_0} H(N) \min\left(1, \frac{x}{T\|x\|}\right) \right),$$

其中 N 是离 x 最近的整数(x 为半奇数时，取 $N = x - \frac{1}{2}$)，$\|x\| = |N - x|$.

(2) $x =$ 正整数 N 时，

$$\sum_{n \le x} a(n) n^{s_0} + \frac{1}{2} a(N) N^{S_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} A(s_0 + s) \frac{N^S}{s} ds$$

$$+ O\left(\frac{N^b B(B + \sigma_0)}{T} \right) + O\left(N^{1-\sigma_0} H(2N) \min\left(1, \frac{\log N}{T}\right) \right).$$

这里 O 常数仅和 σ_a, b_0 有关.

3 定理证明

证明定理 1

对任意复数 $s(\mathrm{Re}\, s > 3)$, 设

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_k(n) c_k(n)}{n^s},$$

由 Euler 公式 可得

$$f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{S_k(p) c_k(p)}{p^2} + \frac{S_k(p^2) c_k(p^2)}{p^{2s}} + \ldots + \frac{S_k(p^n) c_k(p^n)}{p^{ns}} + \ldots \right)$$

$$=\frac{\zeta(s+1)\zeta(ks-1)\zeta(s-k)}{\zeta\left(2(s-k)\right)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p^{s-k}+1)}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)\right),$$

其中$\zeta(x)$为 Riemann Zeta 函数，并在 s=1 处有一阶极点，留数为 1. 而 $f(s)\frac{x^2}{s}$ 在$s=k+1$处有一阶极点，留数为

$$\frac{6}{(k+1)\pi^2}\zeta(k+2)\zeta(k^2+k-1)x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p+1)}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right)$$

在 Perron 公式[6]中取$b=k+\frac{3}{2}+\varepsilon, T\geq 2$可得

$$\sum_{n\leq x}S_k(n)c_k(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k+\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}f(s)\frac{x^2}{s}ds+O\left(\frac{x^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T}\right).$$

将上式积分限移至$\operatorname{Re}s=k+\frac{1}{2}+\varepsilon$处，并取$T=x$可得

$$\sum_{n\leq x}S_k(n)c_k(n)=\frac{6}{(k+1)\pi^2}\zeta(k+2)\zeta(k^2+k-1)x^{k+1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p+1)}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{k+\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}+\int_{k+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}+\int_{k+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}ds\cdot$$

易得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{k+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}f(s)\frac{x^s}{s}ds\right|$$

$$\ll\int_o^T\left|\frac{\zeta(k+\frac{5}{2}+\varepsilon+it)\zeta\left(k(k+\frac{3}{2}+\varepsilon+it)-1\right)\zeta(\frac{1}{2}+\varepsilon+it)}{\zeta\left(2(\frac{1}{2}+\varepsilon+it)\right)}\right|\frac{x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}}{1+|t|}dt\ll x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

与

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{k+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}+\int_{k+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}\right)f(s)\frac{x^s}{s}ds\right|$$

$$\ll\int_{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon}\left|\frac{\zeta(\sigma+2+iT)\zeta\left(k(\sigma+1+iT)-1\right)\zeta(\sigma-k+iT)}{\zeta\left(2(\sigma-k+iT)\right)}\right|$$

$$\left|\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p^{s-k}+1)}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{(k-1)s}}\right)\right)\frac{x^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T}\right|d\sigma\quad\ll\frac{x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}}{T}=x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

从而可得

$$\sum_{n\leq x}S_k(n)c_k(n)=\frac{6}{(k+1)\pi^2}\zeta(k+2)\zeta(k^2+k-1)x^{k+1}$$

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p+1)}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right)+O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

这就完成了定理 1 的证明.

类似的，对任意复数 $s(\operatorname{Re} s>2)$，设

$$f_1(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k(c_k(n))}{n^s}$$

由 Euler 公式[7]可得

$$f_1(s)=\prod_p \left(1+\frac{S_k(c_k(p))}{p^s}+\frac{S_k(c_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots+\frac{S_k(c_k(p^n))}{p^{ns}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\prod_p \left(1+\frac{1}{(p^{s-1}+1)(p^s+1)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-2)s}}+\left(p^s(1-\frac{1}{p^{(k-1)s}})+p^{2s-1}-p^{s-1}\right)\frac{1}{p^{ks-1}}\right)\right).$$

而 $f_1(s)\dfrac{x^s}{s}$ 在 s=2 处有 1 阶极点，留数为

$$\frac{3}{\pi^2}x^2\prod_p \left(1+\frac{1}{(p+1)(p^2-1)}\left(1-\frac{1}{p^{2(k-2)}}+\left(p^2\left(1-\frac{1}{p^{2(k-1)}}\right)+p^3-p\right)\frac{1}{p^{2k-1}}\right)\right)$$

由定理 1 的方法立即可得

$$\sum_{n\le x}S_k(c_k(n))=\frac{3}{\pi^2}x^2\prod_p \left(1+\frac{1}{(p+1)(p^2-1)}R(2)\right)+O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}),$$

其中

$$R(2)=1-\frac{1}{p^{2(k-2)}}+\left(p^2(1-\frac{1}{p^{2(k-1)}})+p^3-p\right)\frac{1}{p^{2k-1}}.$$

这就完成了定理 2 的证明.

同样的，对任意复数 $s(\operatorname{Re} s>3)$, 设

$$f_2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(n)(c_k(n))}{n^s}$$

由 Euler 公式[7]可得

$$f_2(s)=\prod_p \left(1+\frac{\overline{S}_k(p)c_k(p)}{p^s}+\frac{\overline{S}_k(p^2)c_k(p^2)}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\overline{S}_k(p^n)c_k(p^n)}{p^{ns}}+\cdots\right)$$

$$=\prod_p \left(1+\frac{p^{k-1}}{p^s}+\cdots+\frac{p}{p^{(k-1)s}}+\frac{p}{p^{ks}}+\frac{p^k}{p^{(k+1)s}}+\cdots+\frac{p^2}{p^{(2k-1)s}}+\frac{p^2}{p^{2ks}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\zeta(s+1)\zeta(ks-1)\zeta(s-(k-1))}{\zeta(2(s-(k-1)))}\prod_p \left(1-\frac{1}{p^k(p^{s-(k-1)}+1)}\left(1-\frac{1}{p^{(k-1)s-1}}-\frac{1}{p^{ks-1}}\right)\right).$$

而 $f_2(s)\dfrac{x^s}{s}$ 在 $s=k$ 处有 1 阶极点, 留数为

$$\frac{6}{k\pi^2}x^k\zeta(k+1)\zeta(k^2-1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{k^2-k-1}}-\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right).$$

由前面的方法立即可得

$$\sum_{n\le x}\overline{S}_k(n)c_k(n)=\frac{6}{k\pi^2}x^k\zeta(k+1)\zeta(k^2-1)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^k(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{p^2-k-1}}-\frac{1}{p^{k^2-1}}\right)\right)+O(x^{k-\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

这就完成了定理 3 的证明.

同理，对任意复数 $s(\mathrm{Re}\, s>2)$, 设

$$f_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{S}_k(c_k(n))}{n^s}.$$

由 Euler 公式[7]可得

$$f_3(s)=\prod_p\left(1+\frac{\overline{S}_k(c_k(p))}{p^s}+\frac{\overline{S}_k(c_k(p^2))}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\overline{S}_k(c_k(p^n))}{p^{ns}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\cdots\right)=\zeta(s).$$

而 $f_3(s)\frac{x^s}{s}$ 在 s=1 处有 1 阶极点，留数为 x，由前面的方法立即可得

$$\sum_{n\le x}\overline{S}_k(c_k(n))=x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

从而完成了定理 4 的证明.

本文主要讨论了 k 阶 Smarandache ceil 函数及其对偶函数与 k 次幂补数的均值分布性质，当 Smarandache ceil 函数的阶数与补数的次幂数不相同时，情况较为复杂，而且 $\sum_{n\le x}$ 的分布不规律，留待日后进一步研究.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, NotSolutions[M]. Chicago: Xipuan Publishing House, 1993.

[2] ZHANG WENPENG. Identities on the k-power complements[C]. Research on Smarandache problems in number theory. Hexis, 2004: 61-64.

[3] IBSTEDT. Computational Aspects of Number Sequences[M]. Lupton:American Research Press, 1999.

[4] IBSTED T. Surfing on the Ocean of Numbers-a few Smarandache Notions and Similar Topics[M]. New Mexico:Erhus University Press, 1997.

[5] SABIN TABIRCA,TATIANA TABIRCA. Some new results concerning the smarandache ceil function[J]. SmarandacheNotions Journal, 2002, 13(1-3): 30-36.

[6] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

[7] APSTOL TOM M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York:Spring-Verlag, 1976

On the mean value of Smarandache Ceil function and its dual function

FENG Qiang, GUO Jin-bao

(School of Mathematics and Computer Science,Yan'an University,Yan`an 716000, P. R. C.)

Abstact: In this paper, by using the analytic methods, the mean value distribution properties of the Smarandache Ceil function as well as its dual function and k-power complements are studied, and some sharped asymptotic formulas are given.

Key words: Smarandache Ceil function; k-power complement; mean value; asymptotic formula