关于 Smarandache ceil函数的一个方程[20]

苟　素

(西安邮电学院应用数理系,陕西 西安　710061)

摘　要: 研究了关于 Smarandache ceil函数的一个方程,并用初等方法得到了它的所有解.

关　键　词: Smarandache ceil函数;方程;方程的解

中图分类号: O156.4　文献标识码: A　文章编号: 1008-5513(2006)01-0048-03

1　前言及引论

对任意正整数 n及给定的整数 $k\geqslant 2$,著名的 F. Smarandache ceil函数 $S_k(n)$是这样定义的: $S_k(n)=\min\{x\in \mathbf{N}|\, n|\, x^k\}$,如 $S_2(2)=2, S_2(3)=3, S_2(4)=2, S_2(5)=5, S_2(8)=4, S_2(9)=3$等.

在文[1]中,罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache教授提出了研究 $S_k(n)$的性质,关于这个问题,已引起了很多学者的关注,并研究了它们的均值性质.如文[2]中的作者给出了

$$(\forall a,b\in \mathbf{N}^*)(a,b)=1\Rightarrow S_k(a\cdot b)=S_k(a)\cdot S_k(b)$$

$$S_k(p_1^{T_1}\cdots p_s^{T_s})=S_k(p_1^{T_1})\cdots S_k(p_s^{T_s})\text{及 } S_k(p^{T})=p^{[\frac{T}{k}]}\Rightarrow S_k(p_1^{T_1}\cdots p_s^{T_s})=p^{[\frac{T_1}{k}]}\cdots p^{[\frac{T_s}{k}]}$$

并在此基础上得出以下结论

$$S_k(n)|\, S_{k+1}(n)\quad \forall n>1, n=p_1\cdots p_s\Rightarrow S_2(n)=n$$

本文利用初等方法研究了一个关于 ceil函数的方程,并得到一个有趣的结果,即就是证明了下面的

定理　对任意正整数 n及给定的整数 $k\geqslant 2$,方程 $S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)=S_k(1+2+\cdots+n)$当且仅当 $n=1,2,3$时成立.

2　定理的证明

注意到

[20]收稿日期: 2005-01-20.
基金项目: 国家自然基金资助项目 (10271093).
作者简介: 苟素 (1972-),女,讲师,研究方向: 数论.

$$S_k(1)=1,\ S_k(2)=2,\ S_k(3)=3\text{及 }S_k(6)=6$$

因此容易验证 $n=1,2,3$为方程 $S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)=S_k(1+2+\cdots+n)$的解.

当 $n\geqslant 4$时,若 $\frac{n(n+1)}{2}$无大于 1的平方因子,则 $S_k(1+2+\cdots+n)=S_k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}$,而 $S_k(n)\leqslant n$,且 $S_k(4)=2$,故有 $S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)<S_k(1+2+\cdots+n)$,即此时方程无解.

若 $\frac{n(n+1)}{2}$有大于 1的平方因子,则 $S_k(1+2+\cdots+n)\leqslant\frac{n(n+1)}{4}$.

设 A为无大于 1的平方因子的数的集合,则

$$\begin{aligned}S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)&\geqslant\sum_{\substack{a\leqslant n\\ a\in A}}S_k(a)=\sum_{\substack{a\leqslant n\\ a\in A}}a=\sum_{a\leqslant n}a|\mu(a)|=\sum_{a\leqslant n}a\sum_{d^2\mid a}\mu(d)\\&=\sum_{d^2u\leqslant n}d^2u\mu(d)=\sum_{d^2\leqslant n}d^2\mu(d)\sum_{u\leqslant\frac{n}{d^2}}u\\&=\sum_{d\leqslant\sqrt{n}}d^2\mu(d)\cdot\frac{\left[\frac{n}{d^2}\right]\left(\left[\frac{n}{d^2}\right]+1\right)}{2}\end{aligned}$$

利用 $[x]=x-\{x\}$,可以得到

$$\begin{aligned}S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)&\geqslant\sum_{d\leqslant\sqrt{n}}d^2\mu(d)\left(\frac{n^2}{2d^4}-\frac{n}{d^2}\left\{\frac{n}{d^2}\right\}+\frac{n}{2d^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{d^2}\right\}^2-\frac{1}{2}\left\{\frac{n}{d^2}\right\}\right)\\&=\frac{n^2}{2}\sum_{d\leqslant\sqrt{n}}\frac{\mu(d)}{d^2}-n\sum_{d\leqslant\sqrt{n}}\mu(d)\left\{\frac{n}{d^2}\right\}+\frac{n}{2}\sum_{d\leqslant\sqrt{n}}\mu(d)+\\&\quad\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant\sqrt{n}}d^2\mu(d)\left\{\frac{n}{d^2}\right\}^2-\frac{1}{2}\sum_{d\leqslant\sqrt{n}}d^2\mu(d)\left\{\frac{n}{d^2}\right\}\\&\geqslant\frac{n^2}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}-\frac{n^2}{2}\sum_{d>\sqrt{n}}\frac{\mu(d)}{d^2}-n\sqrt{n}-\frac{n\sqrt{n}}{2}-\frac{n\sqrt{n}}{2}-\\&\quad\frac{n\sqrt{n}}{2}\end{aligned}$$

这里我们用到恒等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}$,因而有

$$S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)\geqslant\frac{n^2}{2}\cdot\frac{6}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}=\frac{3n^2}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}$$

如果 $\frac{3n^2}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}>\frac{n^2+n^{\frac{3}{2}}}{4}$就有 $\frac{3n^2}{\pi^2}-\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}>\frac{n(n+1)}{4}$,即 $\sqrt{n}>\frac{11\pi^2}{12-\pi^2}$,可解得 $n>2600$满足不等式,此时

$$S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)>S_k(1+2+\cdots+n)$$

故方程无解.

事实上,若 $\frac{n(n+1)}{2}$有大于或等于 3的平方因子,只要验证 n从 4到 400即可,故当 $4\leqslant n\leqslant 2600$时,只要验证 $\frac{n(n+1)}{2}$含 2的平方因子即可,这样很容易验证 n从 4到 2600时,方程

$S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)>S_k(1+2+\cdots+n)$ 无解.

因此,方程 $S_k(1)+S_k(2)+\cdots+S_k(n)=S_k(1+2+\cdots+n)$ 仅有三个正整数解 $n=1,2,3$.

于是完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only problems not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Ibstedt. Surfinig On the Ocean of Numbers–A Few Smarandache Nothins and Similar Topics[M]. New Mexico, USA: Erhus University Press, 1997.

[3] Sabin Tabirca, Tatiana Tabirca. Some New Results Concerning the Smarandache Ceil Function[J]. Smarandache Nothins Journal, 2002, 13(1/2/3): 30-36.

[4] Yi Yuan, Liang Fangchi. On the Primitive Numbers of Power p and k-Power Root[C]//Zhang Wenpeng. Reseach on Smarandache Problems in number Theory. Phoenix, USA: Hexis, 2004 5-8.

[5] 潘承洞,潘承彪.初等数论基础[M].北京:北京大学出版社, 1992.

An equation involving the Smarandache ceil function

GOU Su

(Department of Applied Mathematics and Physics, Xi′an Institute of Posts and Telecommunications, Xi′an 710061, China)

Abstract In this paper, we studied the solutions of an equation involving the Smarandache ceil function, and obtained all solutions for this eqution.

Key words Smarandache ceil function, equation, solution

2000 MSC 11D99