DOI:10.13467/j.cnki.jbuns.2011.01.016

宝鸡文理学院学报(自然科学版),第31卷,第1期,第23-25页,2011年3月
Journal of Baoji University of Arts and Sciences (Natural Science), Vol.31, No.1, pp.23-25, Mar.2011
DOI: CNKI: 61—1290/N.20110309.0905.000
http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1290.N.20110309.0905.000.html

关于Smarandache三角形数的下部及上部数列*

黄 炜
(宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要:目的 研究Smarandache三角形数及其数列的性质。方法 利用初等方法和解析方法对其进行研究。结果 研究了三角形数的分部序列的算术平均值及几何平均值的极限问题,获得了这些数列的渐近公式。结论 发展了F.Smarandache教授在《Only Problems, Not Solution》一书(Xiquan Publishing House, 1993)中涉及的相关研究工作。

关键词:三角形数的上部序列;三角形数的下部序列;均值;渐近公式
中图分类号:O156.4 文献标志码:A 文章编号:1007-1261(2011)01-0023-03

On inferior and superior partial sequences of the triangular numbers

HUANG Wei
(Department of Basic, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, Shaanxi, China)

Abstract: **Aim** To study the properties of triangular numbers and their partial sequences in *Only Problems, Not Solution*, which was written by Professor F. Smarandache, a Romanian-American number theory expert and it was published by Xiquan Publishing House in 1993. **Methods** The elementary method and analytic method are adopted to discuss the aforesaid aim. **Results** By discussing the limit problem of the arithmetic mean and the geometric mean of several partial sequences of triangle numbers, the asymptotic formula of these sequences are obtained. **Conclusion** The relevant research work has been extended that F. Smarandache professor discussed in *Only Problems, Not Solution*.

Key words: superior partial sequence of triangular numbers; inferior partial sequence of triangular numbers; mean value; asymptotic formula
MSC 2010: 11B13; 11H60

1 引言与结论

美籍数论专家F.Smarandache教授在文献[1]中定义了三角形数列:对于任意正整数m,

$$S(m,3)=\frac{m(m+1)}{2}\quad(m=1,2,\cdots),$$

由于这些数$S(m,3)$可以形象的用下列三角形图形表示(如图1),故称为m个三角形数,文献[2-3]类似的定义了r角形数,即对于任意的正整数m,称自然数$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))(r\geq 3)$为$r$角形数,有关$r$角形数数列的各种性质研究参阅文献[2-6]。下面我们定义正整数n的三角形数上下部分数列:

$$u_3(n)=\max\left\{\frac{m(m+1)}{2}:n\geq\frac{m(m+1)}{2},m\in\mathbf{N}^+\right\},$$

$$v_3(n)=\min\left\{\frac{m(m+1)}{2}:n\leq\frac{m(m+1)}{2},m\in\mathbf{N}^+\right\}$$

称$u_3(n)$表示不大于n的最大的三角形数的部分数列,亦称为下部三角形数的部分数列,称$v_3(n)$表示不小于n的最小的三角形数部分数列,亦称

* 收稿日期:2010-11-18;修回日期:2010-12-16;网络出版时间:2011-03-09 09:05.
基金项目:国家自然科学基金项目(10671155,10871123);陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)
作者简介:黄炜(1961-),男,陕西岐山人,教授,研究方向:数论.Email:wphuangwei@163.com

为上部三角形数的部分数列，三角形数为：1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, …, $\frac{m(m+1)}{2}$, …, 对应的三角形数的下部与上部数列分别为

$$u_3(1)=1, u_3(2)=1, u_3(3)=3, u_3(4)=3,$$
$$u_3(5)=3, u_3(6)=6, u_3(7)=6, u_3(8)=6,$$
$$u_3(9)=6, u_3(10)=10, u_3(11)=10, \cdots$$
$$v_3(1)=1, v_3(2)=3, v_3(3)=3, v_3(4)=6,$$
$$v_3(5)=6, v_3(7)=10, v_3(8)=10,$$
$$v_3(9)=10, v_3(10)=10, v_3(11)=15, \cdots$$

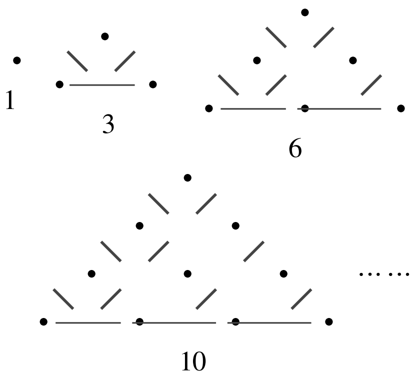

图 **1**　三角形数的几何形状

在文献[4] 中给出结果：$m=\sqrt{2n}+O(1)$。令：

$$S_3(n)=\frac{[u_3(1)+u_3(2)+u_3(3)+\cdots+u_3(n)]}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_3(i),$$

$$I_3(n)=\frac{[v_3(1)+v_3(2)+v_3(3)+\cdots+v_3(n)]}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_3(i),$$

$$K_3(n)=(u_3(1)+u_3(2)+u_3(3)+\cdots+u_3(n))^{\frac{1}{n}}=\left(\sum_{i=1}^{n}u_3(i)\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$L_3(n)=(v_3(1)+v_3(2)+v_3(3)+\cdots+v_3(n))^{\frac{1}{n}}=\left(\sum_{i=1}^{n}v_3(i)\right)^{\frac{1}{n}}。$$

关于数列 $S_3(n), I_3(n), K_3(n), L_3(n)$，从已有文献中未发现对此的研究。本文利用文献[7] 的思想及误差项的分析处理，研究了这 2 个数列的均值性质，并给出了 2 个有趣的渐近公式，同时研究了：$\frac{S_3(n)}{I_3(n)}, \frac{K_3(n)}{L_3(n)}, (S_3(n)-I_3(n)), (K_3(n)-L_3(n))$ 的敛散性，即就是证明了下面的：

定理　对一任意正数 $x\geqslant 1$，有渐近式

$$\sum_{n\leqslant x}u_3(n)=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$\sum_{n\leqslant x}v_3(n)=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)。$$

推论 1　对一任意正整数 n，有渐近式及极限式 $\frac{S_3(n)}{I_3(n)}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_3(n)}{I_3(n)}=1$。

推论 2　对一任意正整数 n，有渐近式及极限式 $\frac{K_3(n)}{L_3(n)}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2n}}\right)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{K_3(n)}{L_3(n)}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(K_3(n)-L_3(n))=0$。

推论 3　对一任意正整数 n，有渐近式及极限式

$$S_3(n)-I_3(n)=2\sqrt{2}n^{\frac{1}{2}}+O(1),$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_3(n)-S_3(n)}{n^{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2},$$
$$\lim_{n\to\infty}(I_3(n)-S_3(n))^{\frac{1}{n}}=1。$$

2　预备引理

为了完成定理的证明需要以下引理

引理　对于任何实数 $n>1$，设 $S(m,3)=\frac{m(m+1)}{2}$，则有渐近公式 $m=\sqrt{2n}+O(1)$。即：对于任意正整数 $n>1$，当

$$\frac{1}{2}(2m+m(m-1))+1\leqslant n<\frac{1}{2}(2(m+1)+m(m+1))$$

时，有 $m=\sqrt{2n}+O(1)$。

证明见文献[4]。

3　定理的证明

先完成定理的证明

证明　对于任何实数 $x>1$，令 M 是[1, x] 上最大的正整数，且

$$\frac{1}{2}(2M+M(M-1))\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(2(M+1)+M(M+1))。$$

注意到：对任意正整数 m，显然有 $m+1$ 个正整数 n 使得 $u_r(n)=\frac{m(m+1)}{2}$，因此

$$u_r\left(\frac{m(m+1)}{2}+j\right)=\frac{m(m+1)}{2},$$
$$j=0, 1, 2, \cdots, m,$$

我们有：

$$\sum_{n\leqslant x}u_3(n)=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{S(t,3)\leqslant n<S(t+1,3)}u_3(n)+$$

$$\sum_{S(M,3)\leqslant n<x} u_3(n)=\sum_{t=1}^{M-1}\frac{m}{2}(2+(m-1))\left[\sum_{\substack{n=1\\u(n)=m}}^{\infty}1\right]+$$

$$((S(M,3)+1)+\cdots+M)=$$

$$\sum_{t=1}^{M-1}(m+1)\left(\frac{m}{2}(2+(m-1))\right)+O(M^2)=$$

$$\sum_{t=1}^{M-1}\left(\frac{1}{2}m^3-m^2+\frac{1}{2}m\right)+$$

$$O(M^2)=\frac{1}{8}M^4+O(M^3)。$$

由引理取 $n=x$ 知 $M=\sqrt{2x}+O(1)$，可得

$$\sum_{n\leqslant x}u_3(n)=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)。$$

同理

$$\sum_{n\leqslant x}v_3(n)=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{S(t,3)<n\leqslant S(t+1,3)}u_3(n)+$$

$$\sum_{S(M,3)<n\leqslant x}u_3(n)=\sum_{t=1}^{M-1}\frac{(m+1)}{2}(2+m)\left[\sum_{\substack{n=1\\u(n)=m}}^{M}1\right]+$$

$$((S(M,r)+1)+\cdots+M)=$$

$$\sum_{t=1}^{M-1}(m+1)\left(\frac{m}{2}(2+(m-1))\right)+O(M^2)=$$

$$\sum_{t=1}^{M-1}\left(\frac{1}{2}m^3+2m^2+\frac{5}{2}m+1\right)+$$

$$O(M^2)=\frac{1}{8}M^4+O(M^3)。$$

由引理取 $n=x$ 知 $M=\sqrt{2x}+O(1)$，可得

$$\sum_{n\leqslant x}v_3(n)=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)。$$

这就完成了定理的证明。

在定理中取 $x=n$，则

$$S_3(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_3(n)=\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$I_3(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_3(n)=\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right),$$

于是得到

$$\frac{S_3n}{I_3(n)}=\frac{\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{K_3(n)}{L_3(n)}=\frac{\left(\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2n}}\right)。$$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_3(n)}{I_3(n)}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{K_3(n)}{L_3(n)}=1$，注意到

$$\lim_{n\to\infty}K_3(n)=1,\lim_{n\to\infty}L_3(n)=1,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(K_3(n)-L_3(n))=0$，即有推论 1、2 的结论。

$$I_3(n)-S_3(n)=\frac{1}{n}\left(\sum_{m\leqslant n}v_3(m)-\sum_{m\leqslant n}u_3(m)\right)=$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{M-1}\left(\frac{1}{2}m^3+2m^2+\frac{5}{2}m+1\right)+O(M^2)\right)-$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{M-1}\left(\frac{1}{2}m^3-m^2+\frac{1}{2}m\right)+O(M^2)\right)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{M-1}(3m^2+4m+1)+$$

$$O(M^2)=\frac{1}{n}M^3+O\left(\frac{M^2}{n}\right)。$$

又由引理知 $M=\sqrt{2n}+O(1)$ 可得

$$I_m(n)-S_m(n)=2\sqrt{2n}+O(1)。$$

于是得到推论 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_r(n)-S_r(n)}{n^{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}(I_n(n)-S_n(n))^{\frac{1}{n}}=1。$$

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 黄炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值[J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，35(1)：101-104.

[3] 黄炜. 关于 r 角形数的补数及其均值[J]. 科学技术与工程，2009，39(18)：5432-5434.

[4] 易媛. 关于三角形数补数及其渐近性质[J]. 商洛师范专科学校学报，2005(2)：3-5.

[5] 杨存典，李超，刘端森. 关于五边形数的补数及其渐进性质[J]. 西安工业学院学报，2006，26(3)：287-289.

[6] 李洁. 关于正整数的六边形数的补数部分[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2006，23(6)：818-820.

[7] HUANG Wei. On the mean value of Smarandache prime part $P(n)$ and $p(n)$ [C]//ZHANG Wenpeng. Research F. Smarandache Problems in Number Theory. Ann: Hexis, 2010: 100-104.

[8] TOM M A. Introdvction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

（编校：李哲峰）

宝鸡文理学院学报(自然科学版),第31卷,第1期,第26-29,72页,2011年3月
Journal of Baoji University of Arts and Sciences (Natural Science), Vol.31, No.1, pp.26-29, 72, Mar. 2011
DOI: CNKI:61-1290/N.20110303.1512.000
http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1290.N.20110303.1512.000.html

纳米 CuO 掺杂$(Ba_{0.87}Ca_{0.09}Sr_{0.04})(Ti_{0.90}Zr_{0.04}Sn_{0.06})O_3$基 Y5V 陶瓷的制备与表征*

湛新星[1],邢祎琳[1],孙芳民[2],畅柱国[1],崔 斌[1],张逢星[1]*
(1. 西北大学 合成与天然功能分子化学教育部重点实验室,
陕西省物理无机化学重点实验室,西北大学 化学与材料科学学院,陕西 西安 710069;
2. 西安恒通电子陶瓷有限公司,陕西 西安 710043)

摘 要:目的 以纳米 CuO 作为烧结助剂制备$(Ba_{0.87}Ca_{0.09}Sr_{0.04})(Ti_{0.90}Zr_{0.04}Sn_{0.06})O_3$陶瓷(BCSTZS),研究纳米 CuO 的用量及烧结温度对 BCSTZS 陶瓷的微观形貌以及介电性能的影响,以期获得低烧 Y5V 型陶瓷材料。方法 采用固相法掺入纳米 CuO 制备一系列的 BCSTZS 陶瓷。通过 XRD,TEM 和 SEM 对样品进行表征,并测试陶瓷的介电性能。结果 在低温烧结时,陶瓷的密度和介电常数随 CuO 掺杂量的增加而增大,纳米 CuO 可以将 BCSTZS 陶瓷的烧结温度降低到 1 150 ℃。当纳米 CuO 含量为 1.5%(质量分数)时,BCSTZS 陶瓷材料满足 EIA Y5V 标准,其 ε_{max}=8 690,介质损耗为 1.67%,绝缘电阻率为 5×10^{13} Ω·cm。结论 采用纳米 CuO 为助烧剂制备的 BCSTZS 陶瓷具有气孔率小、密度较大,晶粒大小一致且分布均匀的特点,采用该方法可以在低温下得到满足 Y5V 标准的 BSCTZS 基陶瓷材料。该研究具有重要的应用前景。

关键词:钛酸钡;纳米 CuO;低温烧结;Y5V;介电陶瓷
中图分类号:O614 文献标志码:A 文章编号:1007-1261(2011)01-0026-04

Preparation and characterization of CuO nanopowders doped $(Ba_{0.87}Ca_{0.09}Sr_{0.04})(Ti_{0.90}Zr_{0.04}Sn_{0.06})O_3$-based Y5V ceramics

ZHAN Xin-xing[1], XING Yi-lin[1], SUN Fang-min[2],
CHANG Zhu-guo[1], CUI Bin[1], ZHANG Feng-xing[1]*
(1. School of Chemistry & Materials Science, Northwest Univ., Key Laboratory of Synthetic and Natural Functional Molecule Chemistry (Ministry of Education), Shaanxi Key Laboratory of Physico-Inorganic Chemistry, Xi'an 710069, Shaanxi, China; 2. Xi'an Hengtong Electrical Ceramics Co. Ltd., Xi'an 710043, Shaanxi, China)

Abstract: **Aim** To study the effects of different amount of CuO nano-powders and sintering temperature on the microstructures and the dielectric properties of BCSTZS ceramics by preparing $(Ba_{0.87}Ca_{0.09}Sr_{0.04})(Ti_{0.90}Zr_{0.04}Sn_{0.06})O_3$ ceramics (BCSTZS) with CuO nano-powders as sintering aids. **Methods** A series of BCSTZS ceramics as samples were synthesized by doping CuO nano-powders with solid phase method, then not only were the samples characterized with XRD, TEM and SEM methods but also dielectric properties of the ceramics were measured. **Results** The density and dielectric constant of ceramics increased obviously with the increase of the Nb content in the low-temperature sintering. In all the additive systems, the single addition of CuO nano-powders was an effective

* 收稿日期:2010-12-20,修回日期:2011-01-12,网络出版时间:2011-03-03 15:12.
基金项目:国家自然科学基金(21071115);陕西省教育厅科研计划项目(产业化培育项目)(09JC01)资助
作者简介:湛新星(1986-),女,贵州贵阳人,硕士,研究方向:纳米材料与功能陶瓷的合成与表征.
通讯作者:张逢星,男,教授(博导),研究方向:功能分子与材料化学.Email: zhangfx@nwu.edu.cn