第31卷 第1期 延安大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 1
2012年3月 Journal of Yanan University (Natural Science Edition) Mar. 2012

DOI: 10.3969/J. ISSN. 1004-602X. 2012. 01. 019

关于 Smarandache 函数 $LS(n)$ 均值研究

黄 炜[1],马 焱[2]

(1. 宝鸡职业技术学院 基础部;2. 宝鸡文理学院 经济管理系,陕西 宝鸡 721013)

摘 要: 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为: 对于任意正整数 n,存在最小的正整数 m,使得 $n \mid m!$,即: $S(n)=\min\{m: n \mid m!, m \in N\}$,本文利用初等及解析方法,研究了 $LS(n)$ 的均值分布性质,否定了美籍数论专家 F. Luca 教授提出的一个猜想。

关键词: 函数 $LS(n)$; 分布性质; 猜想; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2012)01-0019-03

1 引言及结论

我国著名数论专家潘承洞院士所说,"提出一个问题往往比解决一个问题更难",如果一个学科充满了问题,特别是悬而未决的疑难问题,则预示着这个学科充满了生命力,否则这个学科预示着枯萎,著名数学家高斯把数论中悬而未决的疑难问题,称作"皇冠上的明珠",以鼓励人们去"摘取"。引起了不少国内外学者的兴趣和关注,对其中的一些猜想已经被证明是正确的,或是部分正确,而另一些猜想被证明是错误的或部分错误,但无论如何,通过研究这些猜想,都给数论的空间的发展及研究提供了新的思想和方法,极大地促进了数论的发展。

著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为: 对于任意正整数 n,存在最小的正整数 m,使得 $n \mid m!$ 即: $S(n)=\min\{m: n \mid m!, m \in N\}$,该数列的前几项为: 1,2,3,4,5,3,7,4,6,5,11,4,13,7,5,6,17,6,19,5,7…根据 $S(n)$ 的定义和性质,易推出,对于任意正整数 n,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$(为 n 的标准素因数分解式),则有 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$。有关函数 $S(n)$ 的性质,已有不少的学者进行了研究,得到了许多有价值的成果[4-6];美籍数论专家 F. Luca 教授对数轮进行许多有益的研究,提出了许多有意义的猜想[1,2,3],Luca 教授在文献[2]中讨论了函数 $A(x)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n\leqslant x}\ln S(n)$ 上下界估计问题,给出了 $A(x)$ 的一个较强的上界估计,进而还在文献[3]中证明了级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{n^{\alpha}}{S(1)\cdot S(2)\cdots S(n)}$ 是绝对收敛的,同时提出了一下的猜想。

猜想: 对于任意实数 $x\geqslant 1$,有渐近估计公式。

$$LS(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)=\ln x-\ln\ln x+O(1)$$

我们采用初等及解析方法,证明了和式不等于原猜想,得到截然不同的结论,给出 $LS(x)$ 的一个渐近公式:

定理: 对于任意实数 $x\geqslant 2$,有渐近估计公式:

$$LS(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)=\ln x+O(1)$$

该定理表明了文献[3]中的猜测是错误的,清楚地说明第二个主项 $\ln\ln x$ 是不存在。

由定理我们立刻到下面的推论:

推论: 当 $n\to\infty$ 时,有极限: $\lim\limits_{n\to\infty}[LS(n)]^{\frac{1}{n}}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{LS(x)}{\ln n}=1$。

收稿日期: 2011-11-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(11071194);陕西省自然科学基金项目资助((09JK432)

作者简介: 黄 炜(1961—),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院教授。

2 引理及其证明

要证明定理需要下面的引理

引理 1 对于任意的正整数 $n>1$，令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式，如果 $\alpha_i>2(i=1,2,\cdots,n)$，那么称 n 为 square－full 数。令 $A_2(x)$ 表示不超过 x 的 square－full 数的集合，有渐近公式：

$$A_2(x)=\frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}x^{\frac{1}{2}}+\frac{\zeta(\frac{2}{3})}{\zeta(2)}x^{\frac{1}{3}}+O(x^{\frac{1}{6}}\exp(-C\log\frac{2}{5}x(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}))\qquad(1)$$

$C>0$ 为常数，$\zeta(s)$ 为 Riemann－zeta 函数。

其证明见参考文献[5]。

引理 2 对任意实数 $x\geqslant1$，有渐近公式：

$$\sum_{\substack{pk\leqslant x\\(p,k)=1}}\ln p=x\ln x+O(x)\qquad(2)$$

其中 p 是任意素数，k 是任意正整数。

证明：素数定理有几个不同的表示形式[8]，从而我们有：

$$\sum_{k\leqslant x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1),\sum_{k\leqslant x}\ln p=x+O(\frac{x}{\ln x}),$$

$$\sum_{k\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2}=D+O(\frac{1}{\ln x})$$

D 是可计算的正常数。

由上述渐近公式，有：

$$\sum_{\substack{pk\leqslant x\\(p,k)=1}}\ln p=\sum_{pk\leqslant x}\ln p\sum_{k\leqslant\frac{x}{p}}1=\sum_{pk\leqslant x}\ln p(\frac{x}{p}-\frac{x}{p^2}+O(1))$$

$$=x\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}-x\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2}+O(\sum_{p\leqslant x}\ln p)=x\ln x+O(x)$$

这就证明了引理 2。

3 定理及其证明

我们先估计 $\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)$ 的上下界

令 $U(n)=\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)$，我们先估计 $U(n)$ 的上界。事实上，依据 $S(n)$ 的定义，对任意一个正整数 n，有 $S(n)\leqslant n$，$\ln S(n)\leqslant\ln n$ 成立，因此

$$\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)\leqslant\sum_{n\leqslant x}\ln n$$

由欧拉求和公式得

$$\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)\leqslant\sum_{n\leqslant x}\ln n=x\ln x-x+O(\ln x)0=x\ln x+O(x)\qquad(3)$$

接下来估计下界。将区间 $[1,x]$ 中的整数分成如下两个集合 A 和 B：

$A=\{m$ 是 square－full 数，且 $m\in[1,x]\}$；

$B=\{m$ 不是 square－full 数，且 $m\in[1,x]\}$

于是有：

$$\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in A}}\ln S(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in B}}\ln S(n)\qquad(4)$$

由集合 A 的定义及引理 1，有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in A}}\ln S(n)\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in A}}\ln n\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in A}}\ln x=\ln x\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in A}}1=\ln xA_2(x)<<\sqrt{x}\ln x\qquad(5)$$

现在估计和式在集合 B 上的渐近公式。

$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$，故对集合 B 中任意整数 n，一定存在一个素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p^2\nmid n$。因此根据 $S(n)$ 函数的定义，我们有 $S(np)>p$。由这我们立即可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in B}}\ln S(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\(n,p)=1}}\ln S(n)\geqslant\sum_{\substack{np\leqslant x\\(n,p)=1}}\ln p\qquad(6)$$

由引理 2 及(6)式，有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\n\in B}}\ln S(n)\geqslant x\ln x+O(x)\qquad(7)$$

由(4)、(5)和(7)式，有：

$$\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)\geqslant x\ln x+O(x)\qquad(8)$$

由(3)和(8)式，有：

$$\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)=x\ln x+O(x)$$

进而有：$LS(x)=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)=\ln x+O(1)$

定理证明完毕。

由于 $\lim_{n\to\infty}[\ln n]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\exp(\frac{\ln\ln n}{n})=\lim_{n\to\infty}\exp(\frac{1}{n\ln n})=1$

故 $\lim_{n\to\infty}[LS(n)]^{\frac{1}{n}}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{LS(n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+O(1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}(1+O(\frac{1}{\ln n}))=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{LS(x)}{\ln n}=1$$

即完成了引理的证明。

参考文献：

[1] Dumitrescu V S. The Smarandache function [M]. Ethus University Press，1996.

[2] Luca F. The average Smarandaehe function [J]. Smarandache Notions Journal，2001，12(1－2－3)：19－27.

[3] Luca F. On a series involving $S(1)\cdot S(2)\cdots S(n)$ [J]. Smarandache Notions Joumal，1999，10(1－2－3)：128－129.

[4] Sandor J. On a dual of the pseudo – Smarandache function [J]. Smarandache Notions, 2002, (13): 16 – 23.
[5] Wang Yongxing. On the Smarandache function [J]. Reserch on Smarandache Problem in Number Theory, 2005(2): 103 – 106.
[6] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1 009 – 1 012.
[7] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.
[8] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[责任编辑 贺小林]

Research on the Mean Value of Smarandache Function $LS(x)$

HUANG WEI[1], MA YAN[2]

(1. Department of Basic, Baoji Vocational and Technical College;
2. Department of Economics and Management, Baoji University of Arts And Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: For any positive integer n, the Smarandache $\ln S(n)$ is defined as the smallest integer m such that $n \mid m!$ That is $S(n) = \min(m: n \mid m!, m \in N\}$. The main purpose of this paper is to study the arithmetical properties of $LS(n)$ by the elementary methods and analytic methods, and to be denied the guess which were proposed by Felice Russo in reference.

Key words: Smarandache function; distribution properties; guess; asymptotic formula

(上接第 18 页)

A Class of Third – Order Nonlinear Differential Equations Sturm Comparison Theorem

LI Fei-fei, QIN Hong-li

(College of Mathematics and Computer Science, Yan an University, Yan an 716000, China)

Abstract: Using differential inequality, Discusses a class of third order nonlinear differential equations Sturm comparison theorem, the promotion of literature corresponding conclusions.

Key words: three order nonlinear differential equations; sturm comparison theorem; zero point; sufficient conditions