DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2010.04.008

西北大学学报(自然科学版)
2010年8月,第40卷第4期,Aug.,2010,Vol.40,No.4
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
JNWU

关于 Smarandache 函数与费尔马数

朱敏慧

(西安工程大学 理学院,陕西 西安 710048)

摘要:目的 研究 Smarandache 函数对费尔马数的下界估计问题。**方法** 利用初等方法、组合方法以及原根的性质。**结果** 证明了估计式 $S(F_n) \geqslant 12 \cdot 2^n + 1$,其中 n 为任意大于3的整数。**结论** 改进了 WANG Jin-rui 的相关结论,使 Smarandache 函数对费尔马数具有一个较强的下界估计。

关 键 词: F. Smarandache 函数;费尔马数;初等方法;原根;下界估计

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-274X(2010)04-0583-03

On the Smarandache function and the Fermat number

ZHU Ming-hui

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: Aim To study a lower bound estimate problem of the Smarandache function for Fermat numbers. **Methods** Using the elementary method, combinational method and the properties of the primitive roots. **Results** The estimate $S(F_n) \geqslant 12 \cdot 2^n + 1$, was proved, where $n \geqslant 3$ be any integer. **Conclusion** A new sharper lower bound estimate of the Smarandache function (for Fermat numbers) is given.

Key words: F. Smarandache function; the Fermat number; elementary method; primitive root; lower bound estimate

1 引言及结论

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$。即, $S(n) = \min\{m: n \mid m!, n \in \mathbf{N}\}$。例如: 函数 $S(n)$ 的前几个值为: $S(1)=1, S(2)=2, S(3)=3, S(4)=4, S(5)=5, S(6)=3, S(7)=7, S(8)=4, S(9)=6, S(10)=5, S(11)=11, \cdots, S(15)=5, S(16)=6, \cdots$。关于 $S(n)$ 的初等性质,许多学者进行了研究,获得了不少有趣的结论[1-6]。例如,文献[2] 研究了 $S(n)$ 的值分布性质, 证明了下面的结论:

设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, 那么对任意实数 $x > 1$,有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta- 函数。

文献 [3] 研究了 $S(2^{p-1}(2^p-1))$ 的下界估计, 证明了对任意奇素数 p,有估计式

$S(2^{p-1}(2^p-1)) \geqslant 2p+1$。

文献[4] 研究了 $S(2^p+1)$ 下界估计问题, 证明了对任意素数 $p \geqslant 7$, 有估计式

$S(2^p+1) \geqslant 6p+1$。

以上文献中所涉及的数列 $2^{p-1}(2^p-1)$ 有着重要的数论背景,事实上数列 $M_p = 2^p - 1$ 称为梅森尼数。梅森尼曾猜测对所有素数 p, M_p 为素数。然而,这一猜测后来被验证是错误的,因为 $M_{11} = 2^{11} - 1 = 23 \times 89$ 是个合数,而数列 $2^{p-1}(2^p-1)$ 与一个古老的数论难题 —— 偶完全数密切相关。有关内容可参阅

收稿日期: 2010-03-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155);西安工程大学校管科研基金资助项目

作者简介: 朱敏慧, 女, 陕西富平人,从事数论研究。

文献[7]及[8]。

此外,文献[5]研究了$S(F_n)$的下界估计问题,证明了对任意正整数$n\geqslant 3$,有估计式

$$S(F_n)=S(2^{2^n}+1)\geqslant 8\cdot 2^n+1。$$

其中F_n为费尔马数,定义为

$$F_n=2^{2^n}+1。$$

本文作为文献[5]的注释,利用初等方法、原根的性质以及组合技巧改进了文献[5]中的结论,获得了更强的下界估计。具体地说即证明了下面的定理。

定理1 对任意正整数$n\geqslant 3$,有估计式

$$S(F_n)\geqslant 12\cdot 2^n+1。$$

2 定理的证明

利用初等方法、原根的性质以及组合技巧直接给出定理1的证明。首先注意到$F_3=257,F_4=65\ 537$,它们都是素数。因此对$n=3,4$,有

$$S(F_3)=257\geqslant 12\cdot 2^3+1,S(F_4)=65\ 537\geqslant 12\cdot 2^4+1。$$

因此不失一般性假定$n\geqslant 5$。如果F_n是一个素数,设$F_n=p$,那么由$S(n)$的性质有

$$S(F_n)=S(p)=p=F_n=2^{2^n}+1\geqslant 12\cdot 2^n+1,$$

如果F_n是一个复合数,那么设p是F_n的任意素因子,显然$(2,p)=1$。设m表示$2\bmod p$的指标。即,m表示最小的正整数r,使得

$$2^r\equiv 1(\bmod p)。$$

因为$p\mid F_n$,有$F_n=2^{2^n}+1\equiv 0(\bmod p)$或者$2^{2^n}\equiv -1(\bmod p)$,及$2^{2^{n+1}}\equiv 1(\bmod p)$。由同余式及指标的性质[7]有$m\mid 2^{n+1}$,因此$m$是$2^{n+1}$的一个因子。设$m=2^d$,其中$1\leqslant d\leqslant n+1$。显然$p\nmid 2^{2^d}-1$,如果$d\leqslant n$,有$m=2^{n+1}$以及$m\mid\phi(p)$。又$\phi(p)=p-1$,于是$2^{n+1}\mid p-1$或者

$$p=h\cdot 2^{n+1}+1。\tag{1}$$

现在分下列3种情况讨论:

(A)如果F_n有至少3个不同的素因子,根据式(1)不妨设为$p_i=h_i\cdot 2^{n+1}+1,i=1,2,3$。因为$2^{n+1}+1$和$2\cdot 2^{n+1}+1$不可能同时为素数(至少有一个能被3整除),$2^{n+1}+1$和$5\cdot 2^{n+1}+1$不可能同时为素数(至少有一个能被3整除),$2\cdot 2^{n+1}+1$和$4\cdot 2^{n+1}+1$不可能同时为素数(至少有一个能被3整除),$2^{n+1}+1$和$4\cdot 2^{n+1}+1$不可能同时为素数(至少有一个能被3或者5整除),$2\cdot 2^{n+1}+1$和$3\cdot 2^{n+1}+1$不可能同时为素数(至少有一个能被3或者5整除),$4\cdot 2^{n+1}+1$和$5\cdot 2^{n+1}+1$不可能同时为素数(至少有一个能被3整除),这样一来,在F_n所含的3个不同素因子中,至少有一个$p_i=h_i\cdot 2^{n+1}+1$中的$h_i\geqslant 6$。不妨设$h_3\geqslant 6$,由$S(n)$的性质知

$$S(F_n)\geqslant p_3\geqslant 6\cdot 2^{n+1}+1=12\cdot 2^n+1。$$

(B)如果F_n恰好含两个不同的素因子,不失一般性可设

$$F_n=(2^{n+1}+1)^\alpha\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)^\beta,$$

或者

$$(2\cdot 2^{n+1}+1)^\alpha\cdot(5\cdot 2^{n+1}+1)^\beta$$

或者

$$(3\cdot 2^{n+1}+1)^\alpha\cdot(4\cdot 2^{n+1}+1)^\beta。$$

如果$F_n=(2^{n+1}+1)^\alpha\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)^\beta$且$\alpha\geqslant 6$或者$\beta\geqslant 2$,那么由$S(n)$的性质立刻推出估计式

$$S(F_n)\geqslant\max\{S((2^{n+1}+1)^\alpha),S((3\cdot 2^{n+1}+1)^\beta)\}=\max\{\alpha\cdot(2^{n+1}+1),\beta\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)\}\geqslant 12\cdot 2^n+1。$$

如果$F_n=2^{2^n}+1=(2^{n+1}+1)\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)=3\cdot 2^{2n+2}+2^{n+3}+1$,那么注意到$n\geqslant 5$,有同余式

$$0\equiv 2^{2^n}+1-1=3\cdot 2^{2n+2}+2^{n+3}\equiv 2^{n+3}(\bmod 2^{n+4})$$

矛盾。因此

$$F_n=2^{2^n}+1\neq(2^{n+1}+1)\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)。$$

如果

$$F_n=(2^{n+1}+1)^2\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)=3\cdot 2^{3n+3}+3\cdot 2^{2n+3}+3\cdot 2^{n+1}+2^{2n+2}+2^{n+2}+1,$$

那么仍然有

$$0\equiv 2^{2^n}+1-1=3\cdot 2^{3n+3}+3\cdot 2^{2n+3}+3\cdot 2^{n+1}+2^{2n+2}+2^{n+2}\equiv 3\cdot 2^{n+1}(\bmod 2^{n+2})$$

矛盾。因此

$$F_n=2^{2^n}+1\neq(2^{n+1}+1)^2\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)。$$

如果$F_n=2^{2^n}+1=(2^{n+1}+1)^3\cdot(3\cdot 2^{n+1}+1)$,那么

$$2^{2^n}+1\equiv(3\cdot 2^{n+1}+1)^2\equiv 3\cdot 2^{n+2}+1(\bmod 2^{n+4})$$

或者

$$0\equiv 2^{2^n}\equiv(3\cdot 2^{n+1}+1)^2-1\equiv 3\cdot 2^{n+2}(\bmod 2^{n+4})。$$

这与$2^{n+4}\nmid 3\cdot 2^{n+2}$矛盾。

如果 $F_n = 2^{2^n} + 1 = (2^{n+1}+1)^4 \cdot (3 \cdot 2^{n+1}+1)$,那么

$$0 \equiv 2^{2^n} \equiv (2^{n+1}+1)^4 \cdot (3 \cdot 2^{n+1}+1) - 1 \equiv 3 \cdot 2^{n+1} (\bmod 2^{n+3})$$

这与 $2^{n+3} \nmid 3 \cdot 2^{n+1}$ 矛盾。

如果 $F_n = 2^{2^n} + 1 = (2^{n+1}+1)^5 \cdot (3 \cdot 2^{n+1}+1)$,那么

$$0 \equiv 2^{2^n} \equiv (2^{n+1}+1)^5 \cdot (3 \cdot 2^{n+1}+1) - 1 \equiv 2^{n+4} (\bmod 2^{2n+2})。$$

这与 $2^{2n+2} \nmid 2^{n+4}$ 矛盾,因为 $n \geqslant 5$。

如果 $F_n = (2 \cdot 2^{n+1}+1)^\alpha \cdot (5 \cdot 2^{n+1}+1)^\beta$ 且 $\alpha \geqslant 3$ 或者 $\beta \geqslant 2$,那么由 $S(n)$ 的性质有

$$S(F_n) \geqslant \max\{S((2 \cdot 2^{n+1}+1)^\alpha), S((5 \cdot 2^{n+1}+1)^\beta)\} = \max\{\alpha \cdot (2 \cdot 2^{n+1}+1), \beta \cdot (5 \cdot 2^{n+1}+1)\} \geqslant 12 \cdot 2^n + 1。$$

如果 $F_n = 2^{2^n} + 1 = (2 \cdot 2^{n+1}+1) \cdot (5 \cdot 2^{n+1}+1)$,那么有

$$F_n = 2^{2^n} + 1 = (5 \cdot 2^{2n+3} + 7 \cdot 2^{n+1} + 1)。$$

从而可推出同余式

$$0 \equiv 2^{2^n} = 5 \cdot 2^{2n+3} + 7 \cdot 2^{n+1} \equiv 7 \cdot 2^{n+1} (\bmod 2^{2n+3})$$

这是不可能的,因为 $2^{2n+3} \nmid 7 \cdot 2^{n+1}$。

如果 $F_n = 2^{2^n} + 1 = (2 \cdot 2^{n+1}+1)^2 \cdot (5 \cdot 2^{n+1}+1)$,那么有

$$0 \equiv 2^{2^n} = (2 \cdot 2^{n+1}+1)^2 \cdot (5 \cdot 2^{n+1}+1) - 1 \equiv 5 \cdot 2^{n+1} (\bmod 2^{n+3})。$$

这是不可能的,因为 $2^{2n+3} \nmid 7 \cdot 2^{n+1}$。

(C) 如果 F_n 恰好有一个素因子,这时当 F_n 为素数时,定理显然成立。于是假定 $F_n = (2^{n+1}+1)^\alpha$ 或者 $F_n = (2 \cdot 2^{n+1}+1)^\alpha, \alpha \geqslant 2$。
如果 $F_n = (2^{n+1}+1)^\alpha$,那么当 $\alpha \geqslant 6$ 时定理1显然成立。如果 $\alpha = 1,2,3,4$ 或者5,那么由同余式不难推出矛盾。因此 $F_n \neq (2^{n+1}+1)^\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant 5$。

如果 $F_n = (2 \cdot 2^{n+1}+1)^\alpha$,那么当 $\alpha \geqslant 3$ 时,由 $S(n)$ 的性质可知定理1显然成立。如果 $\alpha = 1$,那么 F_n 为素数,定理1也成立。当 $F_n = (2 \cdot 2^{n+1}+1)^\alpha$ 时,由同余式

$$0 \equiv 2^{2^n} = (2^{n+2}+1)^2 - 1 \equiv 2^{n+3} (\bmod 2^{2n+2})$$

立刻推出矛盾。因为当 $n \geqslant 5$ 时,$2^{2n+2} \nmid 2^{n+3}$。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago:Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报, 2006,49(5):1009-1012.

[3] LE Mohua. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p-1))$[J]. Smarandache Notions Journal,2001,12(1-2-3):217-218.

[4] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学,2008,24 (4):706-708.

[5] WANG Jin-rui. On the Smarandache function and the Fermat number[J]. Scientia Magna,2008,4(2):25-28.

[6] LU Ya-ming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna,2006,2(1):76-79.

[7] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York:Springer-Verlag,1976.

[8] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社, 2007.

(编 辑 亢小玉)