第 9卷 第 20期 2009年 10月
1671-1819(2009)20-6125-02

科学技术与工程
Science Technology and Engineering

Vol. 9 No. 20 Oct. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

关于 Smarandache函数两个方程的研究

陈 斌 李保英
(渭南师范学院数学与信息科学系,渭南 714000)

摘 要 对于 $\forall n \in N$, $\omega(n)$表示 n的所有不同的素因数的个数, $S(n)$是 Smarandache可乘函数。研究了方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$和方程 $S(n^2)=2^{\omega(n^2)}$的可解性,并给出它的正整数解的公式。

关键词 Smarandache可乘函数 方程的解 解的个数
中图法分类号 O156.4; 文献标志码 A

对 $\forall n \in N$,设 n的标准分解式为: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$,则 $\omega(n)$是 n的所有不同的素因数的个数。在参考文献[1]中,定义了一个新的 Smarandache可乘函数,它定义为:对于 $\forall n \in N$, $S(1)=1$,当 $n>1$,且 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$为 n标准分解式时, $S(n) = \max\{p_1 a_1, p_2 a_2, \cdots, p_k a_k\}$。

参考文献[2]研究了 Smarandache方程 $S(n)=\varphi(n)$的整数解,参考文献[3]研究了方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}$的整数解,本文在此基础上研究了方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$及 $S(n^2)=2^{\omega(n^2)}$的解,即完成了下面的定理:

定理 1 设 $n \in N_+$,方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$有无数个整数解,其解为:

其中 p_i为大于等于 3的素数。

定理 2 设 $n \in N_+$,方程 $S(n^2)=2^{\omega(n^2)}$有无数个整数解,其解为其中 p_i为大于等于 3的素数。

2 定理的证明

为了完成定理的证明,引入以下几个引理:

引理 1[4] (算术基本定理)任一大于 1的整数 a能表示成素数的乘积。

引理 2 p为大于等于 3的素数, a为任意正整数,则 $pa \neq 2^k$, $k \in N_+$。

证明假设 $pa = 2^k$,记 $m = pa$, $n = 2^k$,则由引理 2知: $a = p_1 p_2 \cdots p_s$, $\therefore m = p p_1 p_2 \cdots p_n$又 $\because m = n$, $\therefore p = p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 2$,与 p是素数矛盾,故: $pa \neq 2^k$, $k \in N_+$。

对定理 1进行归纳总结。[2,3,5])。

当 $n=1$时,显然是 $S(n)=2^{\omega(n)}$的解。

设 $n = 2^m p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, $3 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$。

若 $m=0$,则 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$,此时 $S(n) = \max\{p_i a_i\}$, $2^{\omega(n)} = 2^k$,由引理 2知 k无整数解, $S(n)=2^{\omega(n)}$无整数解。

若 $m \neq 0$,则 $S(n) = \begin{cases} 2m, & 2m \geqslant p_i a_i \\ p_i a_i, & 2m < p_i a_i \end{cases}$ $2^{\omega(n)} = 2^{k+1}$。

(1)如果 $S(n) = p_i a_i$,则由引理 2知 $p_i a_i \neq 2^{k+1}$, $k \in N_+$, $\therefore$方程无整数解。

(2)如果 $S(n)=2m$,则:

$m=1$, $2m = 2 \times 1 = 2^{k+1} \Rightarrow k=0$,所以 $S(2) = 2^{\omega(n)} = 2^1$, $\therefore n=2$是方程的解;

$m=2$, $2m = 2 \times 2 = 2^{k+1} \Rightarrow k=1$,此时 $n = 2^2 \times 3$是方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$的解;

$m=3$, $2m = 2 \times 3 = 2^{k+1}$ k无整数解,所以方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$无解;

$m=4$, $2m = 2 \times 4 = 2^{k+1} \Rightarrow k=2$,此时 $n = 2^4 \times$

2009年 6月 26日收到 国家自然科学基金项目(10971023)、陕西省教育厅基金项目(SJ08A22)、渭南师范学院基金项目(09YKZ009)资助
第一作者简介:陈 斌,(1979—)男,陕西省咸阳人,硕士,渭南师范学院讲师。

3×5或 $n=2^4\times3^2\times5$或 $n=2^4\times5\times7$或 $n=2^4\times3^2\times7$或 $n=2^4\times3\times7$均是方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$的解;

$m=5, 6, 7$, $2m=2^{k+1}$, k无整数解, 所以方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$均无解;

$m=8$, $2m=2\times8=2^{k+1}\Rightarrow k=3$,

此时 $n=2^8 p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \quad (p_1 a_1, p_2 a_2, p_3 a_3\leqslant 16)$是方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$的解。

依次类推, 我们猜想 $S(n)=2^{\omega(n)}$的整数解为:

其中 p_i为大于等于 3的素数。

以下我们来证明所求 n的就是方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$的解。

证明: $n=1$显然是方程 $S(n)=2^{\omega(n)}$的解;

$n=2^m p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots p_N^{a_N}\ (m=2^N, p_i a_i\leqslant 2m)$;

左边$=S(n)=2m=2\times2^N$, 右边$=2^{\omega(n)}=2^{N+1}$。所以: 左边=右边, 即 $S(n)=2^{\omega(n)}$, 于是就完成了定理 1的证明。

定理 2的研究方法与定理 1的方法相同。

参 考 文 献

1 刘燕妮, 李 玲, 刘保利. Smarandache函数未解决问题及其新进展. 西安: 西北大学出版社, 2008

2 冀永强. 数论函数及其方程. 纺织高校基础科学学报, 2006; 19(1): 5—6

3 吕志宏. 两个数论函数及方程. 纯粹数学与应用数学, 2006; 22(3): 303—306

4 张文鹏. 初等数论. 陕西: 陕西师范大学出版社, 2007

5 易 媛, 亢小玉. Smarandache函数问题研究. 西安: 西北大学出版社, 2006

6 刘燕妮, 潘晓伟. 两个包含 Smarandache函数的方程及其解. 黑龙江大学自然科学学报, 2006; 23(6): 857—859

7 黄寿生, 陈锡庚. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^5)$. 华南师范大学学报, 2007; (4)41—43

Two Equations Involving the Smarandache Function and Its Solutions

CHEN Bin, LI Bao-ying

(Department of Mathematic and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan 714000, P. R. China)

[Abstract] For any given positive integer $n\geqslant 1$, $\omega(n)$ is defined to be the number of different prime divisor of n. $S(n)$ is a Smarandache multilicative function. The solvability of the equations of $S(n)=2^{\omega(n)}$ and $S(n^2)=2^{\omega(n^2)}$ are studied, and all its solutions are given.

[Key words] Smarandache multilicative function solutions number of solutions