DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2012.03.032

第25卷第3期 纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报 Vol. 25, No. 3
2012年9月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Sept., 2012

文章编号:1006-8341(2012)03-0335-04

关于 Smarandache 函数的 β 次混合均值

刘 卓,石 鹏

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要:研究了 Smarandache 函数与最大素因子函数 $P(n)$ 之差的 β 次方的值分布问题.利用初等方法给出了 $\sum\limits_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^{\beta}$ 的一个较强的渐近公式,其中 $x\geqslant 3,\beta>1$ 为任意实数.

关键词:初等方法;*Smarandache* 函数;渐近公式

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

1 引言与结论

$\forall n\in \mathbf{N}_+$,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$,即 $S(n)=\min\{m:m\in \mathbf{N}_+;n\mid m!\}$.如果 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则从 $S(n)$ 的定义容易推出 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$.而 $P(n)$ 为正整数 n 的最大素因子.

关于 $S(n)$ 和 $P(n)$ 的各种性质,许多学者进行了研究,获得了不少有意义的结果[1-8],文献[1]研究了 $S(n)$ 的值分布问题,证明了 $\forall x\in \mathbf{R},x\geqslant 3$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(3/2)x^{3/2}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x}\right).$$

文献[2]研究了 $S(n)$ 与 Smarandache LCM 函数的混合均值,证明了 $\forall x\in \mathbf{R},x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)}=x+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln x}\right).$$

文献[3]研究了 $SL(n)$ 与最大素因子函数 $P(n)$ 的值分布问题,证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{5/2}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{5/2}}{\ln^2 x}\right).$$

文献[4]研究了 Smarandache LCM 函数的对偶函数与最小素因子函数 $p(n)$ 的均方值,证明了 $\forall x\in \mathbf{R},x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(\overline{SL}(n)-P(n))^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x^{5/2}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{5/2}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

文献[5]研究了2个 Smarandeche LCM 函数的混合均值性质,$\forall x\in \mathbf{R},x>1$,得到了下面的2个均值渐近公式

收稿日期:2012-05-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194),陕西省教育厅科学计划项目(12JK0871)

通讯作者:刘卓(1987-),女,辽宁省葫芦岛市人,西北大学数学系硕士研究生.E-mail:liuzhuo198704@sina.com

$$\sum_{n\leqslant x}SL(u_r(n))=\frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln\sqrt{2x/(r-2)}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln^i\sqrt{2x/(r-2)}}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

$$\sum_{n\leqslant x}SL(v_r(n))=\frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln\sqrt{2x/(r-2)}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln^i\sqrt{2x/(r-2)}}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 c_i $(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

文献[6] 研究了 $S(2^p+1)$ 的下界估计,并给出了当 $p\geqslant 7$ 时,有估计式 $S(2^p+1)\geqslant 6p+1$.

文献[7] 研究了素因子函数的均值估计,给出了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}P(n)=\int_{3/2}^{2}\zeta(\sigma)\frac{x^\sigma}{\sigma}\mathrm{d}\sigma+O(E(x)).\tag{1}$$

其中 $E(x)=x^2\exp(-c(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5})$,$c$ 为常数.

文献[8] 给出了 $S(n)$ 的渐近公式,即就是证明了

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)=\frac{\pi}{12}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).\tag{2}$$

将式(1),(2) 的 2 个结果作差不难得出 $\sum\limits_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^\beta$ 当 $\beta=1$ 时的渐近公式,故在此只深入研究 $\beta>1$ 的情形,具体地说就是证明了下面的:

定理 1 $\forall x\in\mathbf{R},x\geqslant 3$,当 $\beta>1$ 时,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^\beta=\frac{2\zeta((\beta+1)/2)x^{(\beta+1)/2}}{(\beta+1)\ln x}+O\left(\frac{x^{(\beta+1)/2}}{\ln^2 x}\right).$$

显然定理 1 是文献[1] 的推广和延伸,特别地当 $\beta=2$ 时,是文献[1] 的结论.

2 定理的证明

2.1 引理

引理 1[1] (ⅰ) 如果 $P(n)\geqslant\sqrt{n}$,则有 $S(n)=P(n)$;

(ⅱ) 如果 $n=mp_1P(n)$,且 $n^{1/3}<p_1<p(n)\leqslant\sqrt{n}$,则有 $S(n)=P(n)$;

(ⅲ) 如果 $n=mP^2(n)$,且 $n^{1/3}<P(n)<\sqrt{n}$,则有 $S(n)=2P(n)$.

引理 2 设 $x\in\mathbf{R},x\geqslant 3$,对任意素数 p 及正实数 α,则有

$$\sum_{p\leqslant x}p^\alpha=\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\ln x}+O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^2 x}\right).$$

证明 由素数定理[9] $\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1=\dfrac{x}{\ln x}+O\left(\dfrac{x}{\ln^2 x}\right)$ 与 Abel 求和公式[10] 知

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x}p^\alpha=&x^\alpha\pi(x)-2^\alpha\pi(2)-\alpha\int_2^x y^{\alpha-1}\pi(y)\mathrm{d}y=\\&x^\alpha\left(\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\right)-\alpha\int_2^x y^{\alpha-1}\left(\frac{y}{\ln y}+O\left(\frac{y}{\ln^2 y}\right)\right)\mathrm{d}y+O(1)=\\&\frac{x^{\alpha+1}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^2 x}\right)-\alpha\int_2^x\frac{1}{\ln y}d\left(\frac{y^{\alpha+1}}{1+\alpha}\right)+O\left(\int_2^x\frac{y^\alpha}{\ln^2 y}\mathrm{d}y\right)+O(1)=\\&\frac{x^{\alpha+1}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^2 x}\right)-\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{x^{\alpha+1}}{\ln x}+O\left(\int_2^x\frac{y^\alpha}{\ln^2 y}\mathrm{d}y\right)+O(1)=\\&\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\ln x}+O\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\ln^2 x}\right).\end{aligned}$$

引理 3 $\forall x\in\mathbf{R},x\geqslant 3$,

(ⅰ) 当 $\beta\geqslant 2$ 时,有估计式 $\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\P(n)\leqslant n^{1/3}}}(S(n)-P(n))^\beta\ll x^{(\beta+2)/3}\ln^{(\beta-1)}x$;

(ⅱ) 当 $1<\beta<2$ 时,有估计式 $\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\P(n)\leqslant n^{1/3}}}(S(n)-P(n))^\beta\ll x^{(\beta+2)/3}\ln^\beta x$;

证明 $\forall n\in\mathbf{N}_+,n\leqslant x,n$ 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$,则有 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}p_i\alpha_i$,

令 $p\alpha=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}p_i\alpha_i$，则有 $S(n)\leqslant p\alpha\leqslant p\ln n$. 注意到 $\alpha=1$ 时 $p=P(n)$，故 $S(n)-P(n)=0$，当 $\alpha\geqslant 2$ 时 $S(n)>P(n)$，当 $\beta\geqslant 2$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{1/3}}}(S(n)-P(n))^{\beta}&\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{1/3}}}S^{\beta}(n)\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{1/3},\ p^2\mid n}}p^{\beta}\ln^{\beta}n\leqslant\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant x^{1/3}}}p^{\beta}\ln^{\beta}x=\\ &\sum_{p\leqslant x^{1/3}}p^{\beta}\sum_{n\leqslant x/p^2}\ln^{\beta}x\ll x\ln^{\beta}x\sum_{p\leqslant x^{1/3}}p^{\beta-2}=\\ &x\ln^{\beta}x\left(\frac{x^{(\beta-1)/3}}{(\beta-1)\ln x^{1/3}}+O\left(\frac{x^{(\beta-1)/3}}{\ln^2 x^{1/3}}\right)\right)\ll\\ &x^{(\beta+2)/3}\ln^{\beta-1}x.\end{aligned}\tag{3}$$

当 $1<\beta<2$ 时由式(3) 及文献[10]，当 $s>0$，$s\neq 1$ 时，$\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s}=\frac{x^{1-s}}{1-s}+\zeta(s)+O(x^{-s})$，知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{1/3}}}(S(n)-P(n))^{\beta}\leqslant x\ln^{\beta}x\sum_{p\leqslant x^{1/3}}p^{\beta-2}=x\ln^{\beta}x\sum_{p\leqslant x^{1/3}}\frac{1}{p^{2-\beta}}\leqslant$$

$$x\ln^{\beta}x\sum_{n\leqslant x^{1/3}}\frac{1}{n^{2-\beta}}=x\ln^{\beta}x\left(\frac{x^{(\beta-1)/3}}{\beta-1}+\zeta(2-\beta)+O\left(\frac{1}{x^{2-\beta}}\right)\right)\ll x^{(\beta+2)/3}\ln^{\beta}x.$$

2.2　定理 1 的证明

借助这 3 个引理完成定理 1 的证明. 为方便后续证明记 $P(n)=p$，由引理 1 与引理 3 可知

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^{\beta}&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)>\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^{\beta}+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^{\beta}=\\ &\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^{\beta}=\\ &\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{1/3}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^{\beta}+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{1/3}}}(S(n)-P(n))^{\beta}.\end{aligned}\tag{4}$$

对满足 $n^{1/3}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$ 的正整数 n 可分 3 种情况来讨论：$A=\{n\mid n=mP(n),P(m)\leqslant\sqrt[3]{n}\}$；$B=\{n\mid n=mP^2(n)\}$；$C=\{n\mid n=mp_1P(n),\sqrt[3]{n}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}\}$. 结合引理 1 可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(S(n)-P(n))^{\beta}=0;\ \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}(S(n)-P(n))^{\beta}=0;\ \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}(S(n)-P(n))^{\beta}=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}p^{\beta}.$$

所以有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{1/3}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(n)-P(n))^{\beta}=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}p^{\beta}.\tag{5}$$

又由于当 $\beta>1$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}p^{\beta}&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ \sqrt[3]{mp^2}<p<\sqrt{mp^2}}}p^{\beta}=\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\ \sum_{m<p\leqslant\sqrt{x/m}}p^{\beta}=\\ &\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\left(\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{\beta}-\pi(m)m^{\beta}-\beta\int_m^{\sqrt{x/m}}t^{\beta-1}\pi(t)\mathrm{d}t\right)=\\ &\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\left[\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln\sqrt{x/m}}+O\left[\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln^2\sqrt{x/m}}\right]-\beta\int_m^{\sqrt{x/m}}\left(\frac{t^{\beta}}{\ln t}+O\left(\frac{t^{\beta}}{\ln^2 t}\right)\mathrm{d}t\right)\right]=\\ &\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\left[\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln\sqrt{x/m}}+O\left[\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln^2\sqrt{x/m}}\right]-\beta\int_m^{\sqrt{x/m}}\frac{1}{\ln t}\mathrm{d}\left(\frac{t^{\beta+1}}{\ln t}\right)+O\left(\int_m^{\sqrt{x/m}}\frac{t^{\beta}}{\ln^2 t}\mathrm{d}t\right)\right]=\\ &\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\left[\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln\sqrt{x/m}}+O\left[\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln^2\sqrt{x/m}}\right]-\frac{\beta}{\beta+1}\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln\sqrt{x/m}}+O\left(\int_m^{\sqrt{x/m}}\frac{t^{\beta}}{\ln^2 t}\mathrm{d}t\right)\right]=\\ &\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{(\beta+1)\ln(x/m)}+O\left(\frac{(\sqrt{x/m})^{\beta+1}}{\ln^2(x/m)}\right)\right)=\end{aligned}$$

$$\frac{2x^{(\beta+1)/2}}{\beta+1}\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{1}{m^{(\beta+1)/2}\ln(x/m)}+O\left(\frac{x^{(\beta+1)/2}}{\ln^2 x}\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{1}{m^{(\beta+1)/2}}\right)=$$
$$\frac{2x^{(\beta+1)/2}}{(\beta+1)\ln x}\sum_{m\leqslant\exp(\sqrt{\ln x})}\frac{1}{m^{(\beta+1)/2}}+O\left(\frac{x^{(\beta+1)/2}}{\ln^2 x}\sum_{\exp(\sqrt{\ln x})<m\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{1}{m^{(\beta+1)/2}}\right)+O\left(\frac{x^{(\beta+1)/2}}{\ln^2 x}\right)=$$
$$\frac{2\zeta((\beta+1)/2)x^{(\beta+1)/2}}{(\beta+1)\ln x}+O\left(\frac{x^{(\beta+1)/2}}{\ln^2 x}\right). \tag{6}$$

于是结合引理3及式(4),(5),(6)可知,当$\beta>1$时有

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^{\beta}=\frac{2\zeta((\beta+1)/2)x^{(\beta+1)/2}}{(\beta+1)\ln x}+O\left(\frac{x^{(\beta+1)/2}}{\ln^2 x}\right).$$

这便完成了定理1的证明.

参考文献:

[1] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报,2006,49(5):1 009-1 012.

[2] 杨明顺. 关于 Smarandache 函数及 Smarandache LCM 函数的混合均值[J]. 西北大学学报:自然科学版,2010,40(5):772-773.

[3] CHEN Jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Sciencia Magna,2007,3(2):15-18.

[4] 闫晓霞. Smarandache LCM 的对偶函数与最小素因子函数的均方值[J]. 纺织高校基础科学学报,2010,23(3):323-325.

[5] 黄炜. 2个 Smarandache LCM 函数的混合均值估计[J]. 纺织高校基础科学学报,2011,24(3):390-393.

[6] 苏丽娟. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计[J]. 纺织高校基础科学学报,2009,22(1):133-134.

[7] 林家发. 有关素因子函数的均值估计[J]. 山东大学学报,1993,28(3):253-260.

[8] ZHANG Wenpeng,LI Junzhuang,LIU Duansen. Research on Smarandache problem in number theory[M]. Hexis:Phoenix,2005:103-106.

[9] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.

[10] APOSTOL Tom M. Introduction to analytic number theory[M]. NewYork:Springer-Verlag,1976.

On the β-th hybrid mean value of the Smarandache function

LIU Zhuo, SHI Peng

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China)

Abstract: The β-th value distribution problem of Smarandache function and the biggest prime divisor function is studied. By using the elementary method, the mean value formula of $\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^{\beta}$ is given, with $x\geqslant 3$, $\beta>1$ being any real number.

Key words: elementary method; Smarandache function; mean value formula

编辑、校对:黄燕萍