第 28 卷 第 2 期
2014 年 4 月
商洛学院学报
Journal of Shangluo University
Vol.28 No.2
Apr. 2014

doi:10.13440/j.slxy.1674-0033.2014.02.003

关于 Smarandache 函数的下界估计

史 婵

(西安邮电大学 通信与信息工程学院,陕西西安 710121)

摘 要:运用初等及组合方法研究 Smarandache 函数在一些特殊值上的下界估计,给出了 Smarandache 函数的一个较强的下界估计,证明了 $S(2^P-1)\geqslant 14P+1$ 以及 $S(2^P+1)\geqslant 14P+1$,其中 P 为任意素数且 $P\geqslant 17$,从而改进了相关文献的结果。

关键词:Smarandache 函数;下界估计;初等方法;渐近公式

中图分类号:O174 **文献标识码**:A **文章编号**:1674-0033(2014)02-0009-02

A Lower Bound Estimate for the Smarandache Function

SHI Chan

(School of Telecommunication and Information Engineering,Xi′an University of Posts and Telecommunications, Xi′an 710121, Shaanxi)

Abstract: Elementary and combinational methods are applied to study the lower bound estimate problem of the Smarandache function for some special sequences, and a group of sharper lower bound estimate $S(2^P-1)\geqslant 14P+1$ and $S(2^P+1)\geqslant 14P+1$ has been obtained, where $P\geqslant 17$ P being any prime. This improved the result of the related documents.

Key words: Smarandache function; lower bound estimate; elementary method; asymptotic formula.

1 引言及结论

众所周知,著名的 Smarandache 函数被定义为 $S(n)=\min\{m:m\in N,n|m!\}$。对于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的研究,许多学者已经做了很大的努力,并且取得了一些成果,为数论今后的发展做出了重要贡献。近年来,一些学者纷纷对 Smarandache 函数的有界性估计问题做了大量的研究和探索,得出了一系列重要的理论成果。

在文献[2]中,作者针对函数 $S(2^{p-1}(2^{p-1}))$ 的下界估计问题做了研究,给出结论:

$$S(2^{p-1}(2^{p-1}))\geqslant 2p+1,$$

p 表示任意的奇素数。

而文献[3]在上述结论的基础上对于函数 $S(2^{p-1}(2^{p-1}))$ 的下界估计问题进行了深入的探讨,得到了更强的估计式:

$$S(2^{p-1}(2^{p-1}-1))\geqslant 6p+1,$$

其中 $p\geqslant 7$ 是任意素数。

有学者还对函数 $S(2^p+1)$ 的下界估计问题进行了研究,得到:

$$S(2^p+1)\geqslant 6p+1,$$

p 为大于等于 7 的任意素数。

基于以上已有的结果,温田丁研究了 $S(2^p-1)$ 以及 $S(2^p+1)$ 两个函数的下界估计问题,证明了下面一组结论:

$$S(2^p-1)\geqslant 10p+1,$$

$$S(2^p+1)\geqslant 10p+1,$$

其中 P 为任意素数且 $p\geqslant 17$。

本文在以上结论的基础上,探讨是否可以通过继续增大不等式右侧 p 的系数而使得函数 $S(2^p-1)$ 以及 $S(2^p+1)$ 有更强的下界估计。通过证明得出了以下定理:

定理 对于任意素数 $p\geqslant 17$,有以下一组估计式

$$S(2^p-1)\geqslant 14p+1, \tag{1}$$

收稿日期:2014-02-20

作者简介:史 婵,女,陕西渭南人,硕士,助教

$$S(2^p+1)\geqslant 14p+1。 \quad (2)$$

2 定理的证明

应用初等及组合数学的方法对定理进行论证。

首先来看定理中(1)式的证明。由 Smarandache 函数 $S(n)$的性质可得，对于任意的素数 $p|n$，有 $S(n)\geqslant p$，且 $p|S(p^{\alpha})$对于所有的正整数 α 都是成立的。则对于任意素数 $p\geqslant 17$，若 r 为 $S(2^p-1)$的任一素因子，立即有 $r\geqslant 5$。所以由 $S(n)$的性质立即得到

$$S(2^p-1)\geqslant r \quad (3)$$

又由于 $r|2^p-1$，所以 $2^p\equiv1(\mathrm{mod}\ r)$。于是 p 为 2 模 r 的指标。所以根据指标的性质得到 $p|\varphi(r)=r-1$，或者 $r=tp+1$。因为 r 是奇素数，所以 t 一定是偶数，可设

$$r=2lp+1, l=1,2,3,\cdots。 \quad (4)$$

如果 2^p-1 是一个完全平方数，则有 $2^p-1=v^2$，即 $2^p=v^2+1$，于是有 $0\equiv 2^p\equiv v^2+1=2(\mathrm{mod}4)$，出现矛盾。所以 2^p-1 不可能是完全平方数。于是 2^p-1 就有下面几种可能：

1)当 2^p-1 为素数时，已经有 $p\geqslant 17$，所以显然 $S(2^p-1)\geqslant 2^p-1\geqslant 14p+1$。

2) 当 2^p-1 恰为一个素数 r 的 t 次幂，$t\geqslant 3$ 时。由于 2^p-1 已经不可能为一个完全平方数，所以 $t=3,5,7,\cdots$。

在 $t\geqslant 7$ 时，结合(3)和(4)两式立即有以下不等式

$$S(2^p-1)\geqslant S(r^t)\geqslant tr>7(2p+1)>14p+1。$$

如果 $t=5$，那么当 $l\geqslant 2$ 时有

$$S(2^p-1)\geqslant 5r>5(4p+1)>14p+1；$$

又因为当 $p\geqslant 17$ 时，$2^p-1<(2p+1)^5$。所以 $l=1$ 时，有

$$2^p-1\neq(2p+1)^5。$$

当 $t=3$，而 $l\geqslant 3$ 时，有以下不等式成立

$$S(2^p-1)\geqslant 3r>3(6p+1)>14p+1；$$

而当 $l=2$，$p\geqslant 17$ 时，有 $2^p-1>(4p+1)^3$；$l=1$，$p\geqslant 17$ 时，$2^p-1>(2p+1)^3$。

3)当 2^p-1 至少包含四个不相同的素因子时，因为 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数，于是由(3)式知至少有一个素数是满足 $r=2lp+1$ 且 $l\geqslant 7$，所以就有 $S(2^p-1)\geqslant r>14p+1$。

当 $l=5$ 时，有不等式

$$2^p-1\neq(2p+1)(6p+1)(8p+1)(10p+1),$$

或者 $2^p-1\neq(4p+1)(6p+1)(8p+1)(10p+1)$。

当 $l=6$ 时，因为明显 $2p+1$ 和 $4p+1$，$4p+1$ 和 $8p+1$，$6p+1$ 和 $10p+1$，以及 $10p+1$ 和 $12p+1$ 是不可能同时为素数的。所以得到

$$2^p-1\neq(2p+1)(6p+1)(8p+1)(12p+1)$$

4)当 2^p-1 恰恰包含三个不相同的素因子时，如果这三个素因子中至少有一个满足 $r=2lp+1$ 且 $l\geqslant 7$，就能得到 $S(2^p-1)\geqslant r>14p+1$。

如果所有素因子里的 l 都小于等于 6，由于 $2p+1$ 和 $4p+1$，$4p+1$ 和 $8p+1$，$6p+1$ 和 $10p+1$ 以及 $10p+1$ 和 $12p+1$ 不可能同时为素数。所以可设 $2^p-1=(2p+1)^a(6p+1)^b(8p+1)^c$，或者是 $2^p-1=(2p+1)^a\cdot(6p+1)^b(12p+1)^c$，因为当 $a\geqslant 7$ 或者 $b\geqslant 3$ 或者 $c\geqslant 2$ 时定理结论显然都是成立的。于是在不失一般性的情况下假设 $2^p-1=(2p+1)^a(6p+1)^b(8p+1)$，或者 $2^p-1=(2p+1)^a\ (6p+1)(8p+1)$，$1\leqslant a\leqslant 6$。又因为如果 $2^p-1=(2p+1)^a\ (6p+1)^2\ (8p+1)$，或者有 $2^p-1=(2p+1)^a(6p+1)(8p+1)$，立即由二次剩余的性质知 2 是素数 $2p+1$ 与 $6p+1$ 的二次剩余。然而当 $p=3(\mathrm{mod}4)$时，设 $p=4l+3$，此时 $\left(\frac{2}{6p+1}\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{6l+5}=-1$，这与 2 是素数 $6p+1$ 的二次剩余是相互矛盾的。如果有 $p=1(\mathrm{mod}4)$，假设 $p=4l+1$，此时有 $\frac{2}{2p+1}=(-1)^{\frac{(2p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{2l+1}=-1$，这和 2 是素数 $2p+1$ 的二次剩余又产生了相互矛盾。

同理可证 $2^p-1=(2p+1)^a(6p+1)^b(12p+1)^c$ 也不成立。所以以上两种假设显然是不可能的。综上所述，当 2^p-1 恰好有三个不同的素因子时，一定有不等式 $S(2^p-1)\geqslant r>14p+1$。

5)当 2^p-1 包含两个不相同的素因子时，由(3)式及 4)中的证明立即得到 2^p-1 不可能同时含有素因子 $2p+1$ 和 $6p+1$。同时，当素数 $p>3$ 时，素数 $2p+1$ 以及 $4p+1$ 中至少有一个可以被 3 整除，因此它们不可能同时为素数，于是得到 $2p-1$ 也不可能同时含有 $2p+1$ 和 $4p+1$ 这两个素因子。所以从(3)式可得当 $2p-1$ 恰好含有两个不一样的素因子时，假设

$2^p-1=(2p+1)^a(8p+1)^b$，或者设

$2^p-1=(4p+1)^a(6p+1)^b$。

当 $b\geqslant 3$，$a\geqslant 7$ 时，有

$$S(2^p-1)\geqslant 7(2p+1)>14p+1。$$

或者

$$S(2^p-1)\geqslant 3(6p+1)>14p+1。$$

讨论当 $b=1,2$，$1\leqslant a\leqslant 6$ 的情况。

若 $b=1$，$1\leqslant a\leqslant 4$，得到 $2^p-1=(2p+1)^a(8p+1)$或 $2^p-1=(4p+1)^a(6p+1)$。如果 $2^p-1=(2p+1)^a(8p+1)$，则由 $2^p-1=(2p+1)^4(8p+1)$立即推出同余式(下转第 39 页)

critical edge of a shortest path between nodes [J]. Information Processing Letters,1998,67(1):51–54.

[4] 闫化海,徐寅峰.不完全信息下交通网络最短路径关键边问题[J].系统工程,2006,24(2):37–40.

[5] Su B, Xu Q, Xiao P. Finding the anti–block vital edge of a shortest path between two nodes [J]. Journal of Combinatorial Optimization,2008,12(16):173–181.

[6] 刘　明,徐寅峰,杜源江,等.不完全信息下交通网络的关键路径问题[J].系统工程,2006,24(12):16–20.

[7] 苏　兵,徐寅峰,肖　鹏.交通网络最优安全路径选择模型与算法[J].西安交通大学学报,2008,42(4):395–398.

[8] Xiao P,Xu Y,Su B. Finding an anti–risk path between two nodes in undirected graphs[J].Journal of Combinatorial Optimization,2009,17(3):235–246.

[9] Oyama T,Morohosi H.Applying the shortest –path –counting problem to evaluate the importance of city road segments and the connectedness of the network–structured system [J]. International Federation of Operational Research Societies,2004,11(5):555–573.

[10] 闫化海,徐寅峰.道路中断情形下的实时关键边和关键点研究[D].西安:西安交通大学,2006:35–39.

[11] 石超峰,徐寅峰.交通网络最大流关键边[J].系统工程,2009,27(9):55–59.

[12] 陆化普,黄海军.交通规划理论研究前沿[M].北京:清华大学出版社,2007:171–178.

[13] Roughgarden T,Tardos E. How Bad is Selfish Routing[J]. Journal of the ACM,2002,49(2):236–259.

[14] Roughgarden T. The Price of Anarchy is Independent of the Network Topology[J].Journal of Computer and System Science,2003,67(2):341–364.

[15] Su B, Hua C Y,Lan X Y,et al.Computing the critical road section for the repair of a transportation network[C]. International Symposium on Emergency Management 2011 (ISEM'11),2011(11):240–243.

(责任编辑:李堆淑)

(上接第 10 页) $2^p-1\equiv-1\equiv(2p+1)^4(8p+1)\equiv1(\mathrm{mod}8)$，得到矛盾。所以有 $a\neq4$。而 $2^p-1\neq(4p+1)^3(6p+1)$。所以不妨设 $1\leqslant a\leqslant3$。此时若 $p\geqslant17$,等式 $2^p-1=(2p+1)^3(8p+1)$或者等式 $2^p-1=(4p+1)^2(6p+1)$也不可能成立,因为有不等式 $2^p-1>(4p+1)^2(6p+1)$以及 $2^p-1>(2p+1)^3(8p+1)$。

如果 $b=2$,$a=5$,6，因为 $p\geqslant17$，得到不等式 $2^p-1<(2p+1)^5\ (8p+1)^2$、$2^p-1<(2p+1)^6\ (8p+1)^2$、$2^p-1<(4p+1)^5(6p+1)^2$ 以及 $2^p-1<(4p+1)^6(6p+1)^2$。所以等式 $2^p-1=(2p+1)^5(8p+1)^2$ 或者等式 $2^p-1=(2p+1)^6(8p+1)^2$ 以及等式 $2^p-1=(4p+1)^5\ (6p+1)^2$ 或者 $2^p-1=(4p+1)^6(6p+1)^2$ 也不可能成立。通过上述推理,可以得出当 2^p-1 恰好含有两个不同的素因子时，有不等式 $S(2^p-1)>14p+1$。

综上五种情况的探讨就完成了定理中 (1)式的证明。运用同样的方法可以论证定理中(2)式的结论。

参考文献：

[1] 徐哲峰.关于 Smarandache 函数的值分布[J].数学学报:中文版,2006,49(5):1009–1012.

[2] Le M H. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p-1))$[J].Smarandache Notions Journal,2001,12(1–3):217–218.

[3] 苏娟丽.关于 Smarandache 函数的一个下界估计[J].纺织高校基础科学学报,2009,22(1):133–134.

[4] 苏娟丽.关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计[J].纯粹数学与应用数学,2008,24(4):706–708.

[5] Wang Jinrui. On the Smarandache function and the Fermat numbers[J].Scientia Magna,2008,4(2):25–28.

[6] 温田丁.Smarandache 函数的一个下界估计[J].纯粹数学与应用数学,2010,26(3):413–416.

[7] Chen G H.New Progress On Smarandache Problems[M]. High American Press,2007.

[8] 任　鹏,王　阳,邓书显.关于 Smarandache 幂函数的注记[J].科技导报,2010,28(17):50–53.

[9] 张文鹏.初等数论[M].西安:陕西师范大学出版社,2007.

(责任编辑:张国春)