DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2012.02.023

第30卷 第2期 河 南 科 学 Vol.30 No.2
2012年2月 HENAN SCIENCE Feb. 2012

文章编号：1004-3918(2012)02-0153-03

关于Smarandache函数的复合函数的均值

赵 琴，高 丽

（延安大学 数学与计算机学院，陕西 延安 716000）

摘 要：对任意的正整数 n，定义数论函数 $W(n)$ 为最小的正整数 k，使得 $n\leqslant k(3k+1)$，即 $W(n)=\min\{k:n\leqslant k(3k+1),k\in\mathbf{N}\}$．利用初等及解析的方法研究复合函数 $S(W(n))$ 的均值分布，并获得了较强的均值分布的渐近公式．

关键词：Smarandache函数；复合函数；均值；渐近公式

中图分类号：O 156.4 **文献标识码**：A

On the Mean Value of the Smarandache Function

Zhao Qin， Gao Li

(College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，Shaanxi China)

Abstract：For any positive integer n，the new function $W(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n\leqslant k(3k+1)$. That is $W(n)=\min\{k:n\leqslant k(3k+1),k\in\mathbf{N}\}$. The main purpose of this paper is to study the mean value properties of the composite function $S(W(n))$，and to give a sharper asymptotic formula by the elementary and analytic methods.

Key words：Smarandache function；composite function；mean value；asymptotic formula

1 引言及结论

对于任意的正整数 n，著名的Smarandache函数 $S(n)$ 定义为最小正整数 m，使得 $n\mid m!$，即 $S(n)=\min\{m:n\mid m!,m\in\mathbf{N}\}$．对于任意正整数 $n>1$，如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准素因数分解式，由 $S(n)$ 的定义和性质容易推出[1]

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant s}\{S(p_i^{\alpha_i})\}. \tag{1}$$

关于 $S(n)$ 的算术性质，许多学者进行了研究，例如文献[2]研究了Smarandache函数的有界性问题，得到了 $S(p^\alpha)$ 的上下界估计，即

$$(p-1)\alpha\leqslant S(p^\alpha)\leqslant(p-1)\alpha[\alpha+1+\log_p^{\alpha}]+1. \tag{2}$$

文献[3]讨论了一个与 $S(n)$ 相关的加权均值的分布问题，文献[4]研究了 $S(n)$ 的均值分布问题，给出了该函数均值的一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

对任意的正整数 n，定义一个新的函数 $W(n)$ 为最小的正整数 k，使得 $n\leqslant k(3k+1)$，即 $W(n)=\min\{k:n\leqslant k(3k+1),k\in\mathbf{N}\}$．本文研究了复合函数 $S(W(n))$ 的均值分布问题，并给出一个较强的渐近公式．

收稿日期：2011-10-24

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271093)；陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)；延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZD2011-04)

作者简介：赵 琴(1985-)，女，陕西米脂人，硕士研究生，主要从事数论方面的研究

通信作者：高 丽(1966-)，女，陕西绥德人，教授，硕士，主要从事数论、代数方面的研究．

定理　设 $k\geqslant 2$ 是给定的整数，则对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S(W(n))=\frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．特别地，当 $k=1$ 时有下面结论：

推论　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S(W(n))=\frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

2　定理的证明

事实上在和式

$$\sum_{n\leqslant x} S(W(n)) \tag{3}$$

中注意到，如果 $W(n)=m$，那么当 $k(3k+1)\leqslant n\leqslant(k+1)(3k+4)$ 时都有 $W(n)=m$．也就是说，方程 $W(n)=m$ 有 $6m+4$ 个解，即 $n=m(3m+1)+1,m(3m+1)+2,\cdots,(m+1)(3m+4)$．由于 $n\leqslant x$，所以当 $W(n)=m$ 时，m 满足 $1\leqslant m\leqslant\frac{\sqrt{12x+1}-1}{6}$，亦即 $m=\frac{\sqrt{3x}}{3}+O(1)$，于是注意到 $S(n)\leqslant n$，有

$$\sum_{n\leqslant x} S(W(n))=\sum_{n\leqslant x,W(n)=m} S(m)=\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{12x+1}-1}{6}} mS(m)+O(x)=\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3}} mS(m)+O(x).$$

现将区间 $[1,\frac{\sqrt{3x}}{3}]$ 中的所有正整数分成两个集合[5] A 和 B，其中集合 A 包含所有那些满足存在素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 m；而集合 B 包含所有那些在区间 $[1,\frac{\sqrt{3x}}{3}]$ 中不属于集合 A 的所有正整数 m．于是利用性质(1)有

$$\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3}} m\cdot S(m)=\sum_{m\in A} m\cdot S(m)+\sum_{m\in B} m\cdot S(m).$$

现在计算集合 A 中的情况

$$\sum_{m\in A} m\cdot S(m)=\sum_{\substack{m\in A\\ p\mid m,p>\sqrt{m}}} m\cdot S(m)=\sum_{\substack{mp\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3}\\ m<p}} mp\cdot S(mp)=\sum_{\substack{mp\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3}\\ m<p}} mp\cdot p=\sum_{m\leqslant\sqrt[4]{\frac{x}{3}}} m\cdot\sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3m}} p^2. \tag{4}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$，于是利用 Abel 求和公式以及素数定理[6]

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中，$c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为常数且 $c_1=1$，有

$$\sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3m}} p^2=\pi\left(\frac{\sqrt{3x}}{3m}\right)\left(\frac{\sqrt{3x}}{3m}\right)^2-\pi(m)\cdot m^2-\int_m^{\frac{\sqrt{3x}}{3m}}2t\pi(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(\sqrt{3x})^3}{(3m)^3}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(\sqrt{3x})^3\cdot\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right)=$$

$$\frac{1}{81}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{3x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(3x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right),\tag{5}$$

其中，$a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．注意到 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$，结合 (4)、(5) 式可得：

$$\sum_{m\in A}m\cdot S(m)=\frac{1}{81}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}\cdot\sum_{m\leqslant\sqrt[4]{\frac{x}{3}}}\frac{1}{m^2}+\sum_{m\leqslant\sqrt[4]{\frac{x}{3}}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(3x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^2\ln^i\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{6}$$

其中，$b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．

现在讨论集合 B 中的情况．由 (1)、(2) 式及集合 B 的定义知，对任意的正整数 $m\in B$，当 m 的标准素因数分解式是 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 时，则有

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant s}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant s}\{\alpha_i\cdot p_i\}\leqslant\sqrt{m}\ln m,\tag{7}$$

于是由 (7) 式可得

$$\sum_{m\in B}m\cdot S(m)\leqslant\sum_{m\in B}m\cdot\sqrt{m}\ln m\leqslant\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3}}m^{\frac{3}{2}}\ln m\leqslant x^{\frac{5}{4}}\ln x.\tag{8}$$

由集合 A、B 的定义并结合 (6)，(8) 式有

$$\sum_{n\leqslant x}S(W(n))=\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{3x}}{3}}m\cdot S(m)+O(x)=\sum_{m\in A}m\cdot S(m)+\sum_{m\in B}m\cdot S(m)+O(x)=$$

$$\frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．于是完成了定理的证明．

在定理中令 $k=1$ 即可得到推论．

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Mark F, Patrick M. Bounding the Smaranache problems, function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1): 37-42.

[3] Wang Yongxing. On the Smarandache function[M]//. Zhang Wenpeng, Li Junzhuang, Liu Duansen. Research on Smarandache problem in number theory, Phoenix, USA: Hexis, 2005: 103-106.

[4] 马忠田. 关于正整数的六边形数部分[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 377-380.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理初等的证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

（编辑　康　艳）