第 32 卷第 5 期　　云南师范大学学报　　Vol. 32 No. 5
2012 年 9 月　　Journal of Yunnan Normal University　　Sept. 2012

关于 Smarandache 函数的复合函数的均值*

高丽，赵琴，谢瑞

(延安大学 数学与计算机学院，陕西 延安 716000)

摘　要： 对任意的正整数 n，定义数论函数 $W(n)$ 为最小的正整数 k，使得 $n \leq k(3k+1)$，即 $W(n)=\min\{k:n\leq k(3k+1),k\in N\}$. 利用初等及解析的方法研究复合函数 $S(W(n))$ 的均值分布，并获得了较强的均值分布的渐近公式.

关键词： Smarandache 函数；复合函数；均值；渐近公式

中图分类号： O156.4　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1007－9793(2012)05－0034－03

1　引言及结论

对于任意的正整数 n，著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小正整数 m，使得 $n|m!$，即 $S(n)=\min\{m:n|m!,m\in N\}$. 对于任意正整数 $n>1$，如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准素因数分解式，由 $S(n)$ 的定义和性质容易推出

$$S(n)=\max_{1\leq i\leq s}\{S(p_i^{\alpha_i})\} \tag{1}$$

关于 $S(n)$ 的算术性质，许多学者进行了研究，例如文献[2]研究了 Smarandache 函数的有界性问题，得到了 $S(p^\alpha)$ 的上下界估计，即

$$(p-1)\alpha\leq S(p^\alpha)\leq(p-1)\alpha[\alpha+1+\log_p^\alpha]+1 \tag{2}$$

文献[3]研究了 $S(n)$ 的均值分布问题，给出了该函数均值的一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\leq x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left[\frac{x^2}{\ln^2 x}\right]$$

对任意的正整数 n，定义一个新的函数 $W(n)$ 为最小的正整数 k，使得 $n\leq k(3k+1)$，即 $W(n)=\min\{k:n\leq k(3k+1),k\in N\}$. 本文研究了复合函数 $S(W(n))$ 的均值分布问题，并给出一个较强的渐近公式.

定理　设 $k\geq 2$ 是给定的整数，则对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}S(W(n))=\frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}}+O\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right].$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数. 特别地，当 $k=1$ 时有下面结论：

推论　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}S(W(n))=\frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}++O\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right].$$

---

* 收稿日期：2012－03－28

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271093)，陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)，延安大学自然科学专项基金项目(YDZD2011－04).

作者简介：高　丽(1966－)，女，陕西绥德人，硕士，教授，主要从事数论、代数方面的研究.

2　定理的证明

事实上在和式

$$\sum_{n\le x} S(W(n)) \tag{3}$$

中,注意到如果 $W(n)=m$,那么当 $k(3k+1)\le n\le (k+1)(3k+4)$ 时都有 $W(n)=m$. 也就是说方程 $W(n)=m$ 有 $6m+4$ 个解 $n=m(3m+1)+1, m(3m+1)+2, \cdots, (m+1)(3m+4)$. 由于 $n\le x$,所以当 $W(n)=m$ 时, m 满足 $1\le m\le \frac{\sqrt{12x+1}-1}{6}$,亦即 $m=\frac{\sqrt{3x}}{3}+O(1)$,于是注意到 $S(n)\le n$,有

$$\sum_{n\le x} S(W(n)) = \sum_{n\le x, W(n)=m} S(m) = \sum_{m\le\frac{\sqrt{12x+1}-1}{6}} mS(m)+O(x) = \sum_{m\le\frac{\sqrt{3x}}{3}} mS(m)+O(x)$$

现将区间 $\left[1,\frac{\sqrt{3x}}{3}\right]$ 中的所有正整数分成两个集合 A 和 B,其中集合 A 包含所有那些满足存在素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 m;而集合 B 包含所有那些在区间 $\left[1,\frac{\sqrt{3x}}{3}\right]$ 中不属于集合 A 的所有正整数 m. 于是利用性质(1)有

$$\sum_{m\le\frac{\sqrt{3x}}{3}} m\cdot S(m) = \sum_{m\in A} m\cdot S(m) + \sum_{m\in B} m\cdot S(m)$$

现在计算集合 A 中的情况

$$\begin{aligned}\sum_{m\in A} m\cdot S(m) &= \sum_{\substack{m\in A\\ p\mid m,\, p>\sqrt{m}}} m\cdot S(m) = \sum_{\substack{mp\le\frac{\sqrt{3x}}{3}\\ m<p}} mp\cdot S(mp)\\ &= \sum_{\substack{mp\le\frac{\sqrt{3x}}{3}\\ m<p}} mp\cdot p = \sum_{m\le\sqrt[4]{\frac{x}{3}}} m\cdot \sum_{m<p\le\frac{\sqrt{3x}}{3m}} p^2 \end{aligned}\tag{4}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$,于是利用 Abel 求和公式以及素数定理 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$,其中, $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为常数且 $c_1=1$,有

$$\begin{aligned}\sum_{m<p\le\frac{\sqrt{3x}}{3m}} p^2 &= \pi\left(\frac{\sqrt{3x}}{3m}\right)\left(\frac{\sqrt{3x}}{3m}\right)^2 - \pi(m)\cdot m^2 - \int_m^{\frac{\sqrt{3x}}{3m}} 2t\pi(t)dt\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(\sqrt{3x})^3}{(3m)^3} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(\sqrt{3x})^3\cdot\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right)\\ &= \frac{1}{81}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{3x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(3x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}\tag{5}$$

其中, $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

注意到 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$,结合(4)、(5)式可得:

$$\begin{aligned}\sum_{m\in A} m\cdot S(m) &= \frac{1}{81}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}\cdot\sum_{m\le\sqrt[4]{\frac{x}{3}}}\frac{1}{m^2} + \sum_{m\le\sqrt[4]{\frac{x}{3}}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(3x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^2\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\\ &= \frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}\tag{6}$$

其中,$b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

现在讨论集合 B 中的情况.由(1)、(2)式及集合 B 的定义知,对任意的正整数 $m\in B$,当 m 的标准素因数分解式是 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 时,则有

$$S(n)=\max_{1\le i\le s}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\le\max_{1\le i\le s}\{\alpha_i\cdot p_i\}\le\sqrt{m}\ln m \tag{7}$$

于是由(7)式可得 $$\sum_{m\in B}m\cdot S(m)\le\sum_{m\in B}m\cdot\sqrt{m}\ln m\le\sum_{m\le\frac{\sqrt{3x}}{3}}m^{\frac{3}{2}}\ln m\le x^{\frac{5}{4}}\ln x \tag{8}$$

由集合 A、B 的定义并结合(6),(8)式有

$$\sum_{n\le x}S(W(n))=\sum_{m\le\frac{\sqrt{3x}}{3}}m\cdot S(m)+O(x)=\sum_{m\in A}m\cdot S(m)+\sum_{m\in B}m\cdot S(m)+O(x)$$

$$=\frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.于是完成了定理的证明.

在定理中令 $k=1$ 即可得到推论.

参 考 文 献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.

[2] MARK F, PATRICK M. Bounding the Smaranache Problems, function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1): 37-42.

[3] WANG YONGXING. Research On Smarandache Problem in Number Theory[M]. Phoenix, USA: Hex is 2005.

[4] 马忠田.关于正整数的六边形数部分[J].纯粹数学与应用数学,2007,23(3):377-380.

[5] 潘承洞,潘承彪.素数定理初等的证明[M].上海:上海科学技术出版社,1988.

[6] 顾江民.n进制下一个数论函数均值计算[J].云南民族大学学报:自然科学版,2010,19(6):548-553.

On the Mean Value of the Smarandache Function

GAO Li, ZHAO Qin, XIE Rui

(College of Mathematics and Computer Science, Yan an university, Yan an 716000, China)

Abstract: For any positive integer n, the new function $W(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n\le k(3k+1)$. That is, $W(n)=\min\{k:n\le k(3k+1),k\in N\}$. The main purpose of this paper is to study the mean value properties of the composite function $S(W(n))$, and to give a sharper asymptotic formula by the elementary and analytic methods.

Key words: Smarandache function; Composite function; Mean value; Asymptotic formula