DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2013.10.004

第35卷第10期 西南大学学报(自然科学版) 2013年10月
Vol. 35 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2013

文章编号: 1673-9868(2013)10-0063-04

关于Smarandache函数的最小公倍数积①

陈国慧

海南师范大学 数学与统计学院,海口 571158

摘要: 设$f(n)$及$g(n)$是两个算术函数,它们的最小公倍数积是通过这两个函数定义的一个新算术函数

$$H(n) = \sum_{[r,s]=n} f(r)g(s)$$

其中$[r,s]$表示正整数r及s的最小公倍数. 利用初等方法以及Smarandache函数$S(n)$的性质研究当$f(n)=g(n)=S(n)$时,$H(n)$的均值性质,并给出一个渐近公式.

关 键 词: Smarandache函数; 最小公倍数积; 初等方法; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156.2 文献标志码: A

对于任意正整数n,著名的Smarandache函数$S(n)$定义为使得$n \mid m!$的最小的正整数m. 即

$$S(n) = \min\{m: m \in \mathbb{N}_+, n \mid m!\}$$

这个函数是美籍罗马尼亚著名的数论专家F. Smarandache教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》[1]一书中引入的. 从$S(n)$的定义很容易推出: 如果$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式,那么$S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此不难算出: $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $\cdots$. 显然,函数$S(n)$既非递增函数,也非递减函数. 关于$S(n)$的进一步性质,很多学者对其进行了研究. 文献[2]建议我们研究方程$Z(n)+1=S(n)$及$Z(n)=S(n)$的可解性,其中$Z(n)$为伪Smarandache函数. 文献[3]完全解决了文献[2]中的这两个问题. 文献[4]研究了$S(n)$的值分布问题,证明了渐近公式:

$$\sum_{n \leqslant x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子,$\zeta(s)$表示Riemann-zeta函数. 文献[5]研究了方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = \sum_{i=1}^{k} S(m_i) \tag{1}$$

的可解性,利用解析数论中著名的三素数定理证明了: 对任意正整数$k \geqslant 3$,方程(1)有无穷多组正整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$. 文献[6]证明了更一般性的结论,即对任意素数$p \geqslant 17$和任意不同的正整数a及b,有估计式

$$S(a^p + b^p) \geqslant 8p + 1$$

文献[7]讨论了Smarandache函数对费尔马数的下界估计问题,证明了: 对任意正整数$n \geqslant 3$,有估计式

---

① 收稿日期: 2012-04-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071194); 海南省自然科学基金资助项目(113006).
作者简介: 陈国慧(1968-),女,海南琼海人,教授,主要从事基础数学的研究.

$$S(F_n) = S(2^{2^n}+1) \geqslant 8 \cdot 2^n + 1$$

其中 $F_n = 2^{2^n}+1$ 为著名的费尔马数. 文献[8]改进了文献[7]的结论，进一步证明了估计式

$$S(F_n) = S(2^{2^n}+1) \geqslant 12 \cdot 2^n + 1$$

另外，文献[9]讨论了 Smarandache 函数及其相关函数的算术乘积的计算问题.

本文的主要目的是利用初等方法以及 Smarandache 函数的性质研究一类新的 Smarandache 函数的均值性质，并给出一个渐近公式.

定义　设 $f(n)$ 及 $g(n)$ 是两个算术函数，它们的最小公倍数积定义为

$$H(n) = \sum_{[r,s]=n} f(r)g(s)$$

其中 $[r, s]$ 表示正整数 r 及 s 的最小公倍数. 函数 $H(n)$ 是由文献[10]首次提出的，文献[11]首次研究了它的性质.

本文研究当 $f(n) = g(n) = S(n)$ 时，函数 $H(n)$ 的均值性质，并给出一个渐近公式，即证明下面的定理:

定理　对任意给定的正整数 k 以及任意实数 $x > 1$，我们有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} H(n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i \cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $d_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 为可计算的常数，且 $d_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\zeta^3(3)}{\zeta(6)}$，$\zeta(s)$ 为 Riemann-zeta 函数.

为了完成定理的证明，我们需要一个简单的结论，即:

引理　对任意正整数 n，我们定义算术函数 $D(n) = \sum_{[u,v]=n} 1$，则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(n)}{n^3} = \frac{\zeta^3(3)}{\zeta(6)}$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann-zeta 函数.

证　首先我们证明算术函数 $D(n)$ 是一个可乘函数. 事实上，$D(n) = d(n^2)$ 为 Dirichlet 除数函数. 对任意满足 $(m, n) = 1$ 的正整数 m 及 n，如果 $[u, v] = mn$，设 $(u, m) = u_1$，$(u, n) = u_2$，$(v, m) = v_1$，$(v, n) = v_2$，其中 (x, y) 表示正整数 x 及 y 的最大公约数. 于是 $[u_1, v_1] = m$，$[u_2, v_2] = n$，从而我们有

$$D(mn) = \sum_{[u,v]=mn} 1 = \sum_{[u_1,v_1]=m} \sum_{[u_2,v_2]=n} 1 = D(m) \cdot D(n)$$

所以 $D(n)$ 为可乘函数.

此外，设 Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(n)}{n^s}$. 由 Dirichlet 除数函数的估计式 $d(n) \ll n^{\varepsilon}$，我们有:

$$D(n) = \sum_{[u,v]=n} 1 \ll \sum_{u|n} \sum_{v|n} 1 = d^2(n) \ll n^{\varepsilon}$$

其中 ε 表示任意给定的整数. 因此由正项级数的收敛法则可知: Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(n)}{n^s}$ 当 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时绝对收敛. 注意到 $[p^i, p^{\alpha}] = p^{\alpha}(i = 0, 1, \cdots, \alpha)$，所以

$$D(p^{\alpha}) = 2\sum_{i=0}^{\alpha} 1 - 1 = 2\alpha + 1 = d(p^{2\alpha})$$

于是由 Euler 积公式(参阅文献[12]中的定理 11.6)，我们有

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{D(p)}{p^s} + \frac{D(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{D(p^k)}{p^{ks}} + \cdots\right) =$$

$$\begin{aligned}&\prod_p\left(1+\frac{3}{p^s}+\frac{5}{p^{2s}}+\cdots+\frac{2k+1}{p^{ks}}+\cdots\right)=\\&\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_p\left(1+\frac{2}{p^s}+\frac{2}{p^{2s}}+\cdots+\frac{2}{p^{ks}}+\cdots\right)=\\&\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_p\frac{p^s+1}{p^s-1}=\prod_p\frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^3}=\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}\end{aligned}\tag{2}$$

在(2)式中取 $s=3$，我们立刻完成了引理的证明.

定理的证明

对任意给定的正整数 k 以及任意实数 $x>1$，显然，由 Smarandache 函数 $S(n)$ 的定义和性质可知：当正整数 n 含有一个素因子 p $(p>\sqrt{n})$ 时，有 $S(n)=p$. 这样的素因子如果存在，也只有一个. 如果不存在这样的素因子，则有 $S(n)\ll\sqrt{n}$. 设 A 表示区间 $[1,x]$ 中所有含素因子 p $(p>\sqrt{n})$ 的整数 n 的集合. B 表示区间 $[1,x]$ 中不属于集合 A 的元素的集合. 对于任意 $n\in A$，设 $n=pn_1$，由函数 $H(n)$ 的定义不难推出

$$\begin{aligned}H(n)&=\sum_{[u,v]=n}S(u)\cdot S(v)=\sum_{[u,v]=pn_1}S(u)\cdot S(v)=\\&\sum_{[u,v]=n_1}S(up)\cdot S(vp)+2\sum_{[u,v]=n_1}S(up)\cdot S(v)=\\&p^2\cdot\sum_{[u,v]=n_1}1+O(p\cdot S(n_1)\cdot d(n_1^2))=\\&p^2\cdot d(n_1^2)+O(p\cdot S(n_1)\cdot d(n_1^2))\end{aligned}\tag{3}$$

当 $n\in B$ 时，显然有 $S(n)\ll\sqrt{n}$，于是有估计式

$$H(n)=\sum_{[u,v]=n}S(u)\cdot S(v)\ll\sum_{u|n}\sum_{v|n}S(u)S(v)\ll S^2(n)\cdot d^2(n)\ll n\cdot d^2(n)\tag{4}$$

由 Abel 恒等式(参阅文献[2]的定理 4.2)及素数定理(参阅文献[3])，我们有

$$\sum_{p\le x}p^2=x^2\cdot\pi(x)-\int_2^x 2y\pi(y)\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^k\frac{c_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\tag{5}$$

其中 $\pi(x)=\sum\limits_{p\le x}1$ 表示区间 $[1,x]$ 中素数的个数，k 是任意给定的正整数，$c_i(i=1,2,3,\cdots)$ 是可计算的常数且 $c_1=\frac{1}{3}$. 于是对任意实数 $x>1$，应用估计式(3),(4)式以及渐近公式(5)，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\le x}H(n)=\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}}H(n)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}H(n)=\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{n<p\le\frac{x}{n}}H(np)+O\Big(\sum_{n\le x}n\cdot d^2(n)\Big)=\\&\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{n<p\le\frac{x}{n}}p^2\cdot d(n^2)+O\Big(\sum_{n\le\sqrt{x}}\sum_{n<p\le\frac{x}{n}}n\cdot p\cdot d(n^2)\Big)+O\Big(\sum_{n\le x}n\cdot d^2(n)\Big)=\\&\sum_{n\le\sqrt{x}}d(n^2)\sum_{p\le\frac{x}{n}}p^2+O\Big(\sum_{n\le\sqrt{x}}n\cdot d(n^2)\sum_{p\le\frac{x}{n}}p\Big)=\\&\sum_{n\le\sqrt{x}}d(n^2)\left(\sum_{i=1}^k\frac{c_i\cdot x^3}{n^3\ln^i\left(\frac{x}{n}\right)}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}\left(\frac{x}{n}\right)}\right)\right)+O\left(\sum_{n\le\sqrt{x}}n\cdot d(n^2)\cdot\frac{x^2}{n^2\ln\left(\frac{x}{n}\right)}\right)=\\&\sum_{i=1}^k\frac{d_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}$$

其中 $d_i(i=1,2,3,\cdots)$ 是可计算的常数，且

$$d_1 = c_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(n)}{n^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\zeta^3(3)}{\zeta(6)}$$

于是完成了定理的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] KENICHIRO K. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. Michigan: Erhus University Press, 1996.

[3] 刘燕妮, 李 玲, 刘宝利. Smarandache未解决的问题及其新进展 [M]. Louisiana: High American Press, 2008.

[4] 徐哲峰. Smarandache函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[5] LU Ya-ming. On the Solutions of an Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[6] 李粉菊, 杨畅宇. 关于Smarandache函数的一个下界估计 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2011, 41(4): 377-379.

[7] WANG Jin-rui. On the Smarandache Function and the Fermat Numbers [J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 25-28.

[8] 朱敏慧. 关于Smarandache函数与费尔马数 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2010, 40(4): 583-585.

[9] 郇 乐. Smarandache函数及其相关函数的性质 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2013, 35(4): 67-70.

[10] STERNECK R D. Ableitung Zahlentheoretischer Relationen Mit Hilfe Eines Mehrdimensionalen Systemes Von Gitterpunkten [J]. Monatscheffe Math Phys, 1894(8): 255-266.

[11] LEHMER D H. A New Calculus of Numerical Functions [J]. Amer J Math, 1931, 53: 843-854.

[12] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[13] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

On the Least Common Multiple Product of Smarandache Function

CHEN Guo-hui

College of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou 571158, China

Abstract: Let $f(n)$ and $g(n)$ be two arithmetical functions. The least common multiple product (L. C. M-product) of $f(n)$ and $g(n)$ is defined by

$$H(n) = \sum_{[r,s]=n} f(r)g(s)$$

where $[r, s]$ denotes the L. C. M. of positive integers r and s. In this paper, the elementary method and the properties of the Smarandache function $S(n)$ are used to study the mean-value properties of the function $H(n)$ with $f(n) = g(n) = S(n)$, and an asymptotic formula for it is given.

Key words: Smarandache function; L. C. M. -product; elementary method; mean value; asymptotic formula

责任编辑 廖 坤