DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2010.04.011
第 22 卷 第 4 期
2010 年 12 月
甘肃科学学报
Journal of Gansu Sciences
Vol.22 No.4
Dec. 2010

关于 Smarandache 函数的混合均值

柴晶霞, 高 丽
(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘 要: 对任意的非负整数 n, 著名的 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k, 使得 $n/[1,2,\cdots,k]$, 其中 $n/[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数. 而函数 $U(n)$ 定义为最小的正整数 k, 使得 $n\leqslant k(2k-1)$, 即 $U(n)=\min\{k:n\leqslant k(2k-1),k\in N\}$. 通过利用初等和解析方法, 研究复合函数 $SL(U(n))$ 的均值, 得到了一个有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache LCM 函数; 复合函数; 均值; 渐近公式
中图分类号: O156.4 文献标志码: A 文章编号: 1004-0366(2010)04-0040-03

On the Hybrid Mean Value of the Smarandache Function

CHAI Jing-xia, GAO Li
(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache LCM function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n/[1,2,\cdots,k]$, where $n/[1,2,\cdots,k]$ denote the least common multiplies of $1,2\cdots,k$. And the function $U(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n\leqslant k(2k-1)$. That is $U(n)=\min\{k:n\leqslant k(2k-1),k\in N\}$. The main purpose of this paper is to study the mean value properties of the composite function $SL(U(n))$ and to give a sharper asymptotic formula by the elementary and analytic methods.

Key words: Smarandache LCM function; composite function; mean value; asymptotic formula

1 主要结果

著名数论专家 Smarandache F 教授在文献[1, 2]中提出 $SL(n)$ 函数, $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k, 使得 $n/[1,2,\cdots,k]$, 其中 $n/[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数, 即 $SL(n)=\min\{k:n/[1,2,\cdots,k]\}$. 例如 $SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $\cdots$, 而函数 $U(n)$ 定义为最小的正整数 k, 使得 $n\leqslant k(2k-1)$, 即 $U(n)=\min\{k:n\leqslant k(2k-1),k\in N\}$. 由 $SL(n)$ 的定义容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式, 那么 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}$. 我们的主要目的是研究 Smarandache 函数 $SL(n)$ 与 $U(n)$ 函数的混合均值问题, 并得到了一个较强的渐近公式.

定理 设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数, 则对任意的实数 $x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(U(n))=\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数. 特别地, 当 $k=1$ 时有以下简单推论.

推论 对于任意整数 $x>1$, 有渐近公式

收稿日期: 2010-03-29
基金项目: 陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)

$$\sum_{n\leqslant x} SL(U(n)) = \frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

2　定理的证明

用初等及解析方法直接给出定理的证明.

对于任意非负整数 $n > 1$, 当 $m(2m-1)\leqslant n\leqslant(m+1)(2m+1)$ 时, 都有 $U(n)=m$. 也就是说方程 $U(n)=m$, 有 $4m+1$ 个解, $m(2m-1)+1$, $m(2m-1)+2$, …, $(m+1)(2m+1)$, 由于 $n\leqslant x$, 所以由文献 [3 ~ 9] 知当 $f(n)=m$ 时, m 满足 $1\leqslant m\leqslant\frac{1+\sqrt{8n+1}}{4}$, 也就是 $m=\frac{\sqrt{2n}}{2}+O(1)$, 于是注意到 $SL(n)\leqslant n$ 有

$$\sum_{n\leqslant x} SL(U(n)) = \sum_{n\leqslant x,\ f(n)=m} SL(m) = \sum_{m\leqslant\frac{1+\sqrt{8n+1}}{4}} m\circ SL(m) + O(x) = \sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}} m\circ SL(m) + O(x).$$

将所有整数 $1\leqslant m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}$, 分成 2 个子集 A、B, 其中 A 满足那些存在素数 p, 使得 p/m, 且 $p>\sqrt{m}$; 而集合 B 包含区间 $\left[1, \frac{\sqrt{2x}}{2}\right]$ 中不属于集合 A 的那些正整数, 于是利用性质有

$$\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}} m\circ SL(m) = \sum_{m\in A} m\circ SL(m) + \sum_{m\in B} m\circ SL(m).$$

现在计算集合 A 的情况为

$$\sum_{m\in A} m\circ SL(m) = \sum_{\substack{m\in A\\ p/m,\ \sqrt{m}<p}} m\circ SL(m) = \sum_{\substack{mp\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}\\ m<p}} m\circ SL(m) = \sum_{mp\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2},\ m<p} mp\circ p = \sum_{m\leqslant 2\sqrt{2x}} m\circ \sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2m}} p^2,$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$, 于是利用 Abel 求和公式、分部积分法以及素数定理有

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为常数, 且 $c_1=1$ 有

$$\sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2m}} p^2 = \frac{x}{2m^2}\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{2m}\right) - m^2\pi(m) - \int_m^{\frac{\sqrt{2x}}{2m}} 2y\pi(y)\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{24}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数. 并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 可以推断

$$\sum_{n\in A} SL(U(n)) = \frac{1}{24}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}}\sum_{m\leqslant 2\sqrt{2x}}\frac{1}{m^2} + \sum_{m\leqslant 2\sqrt{2x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^2\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right) =$$
$$\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

现在讨论集合 B 的情况, 由 $SL(n)$ 函数的定义和性质知, 对于任意的 $m\in B$, 当 m 的标准分解式为 $m=p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_r^{\alpha_r}$ 时有

$$\sum_{m\in B} m\circ SL(m) = \sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2},\ SL(m)=p,\ p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}} m\circ p + \sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2},\ SL(m)=p^\alpha,\ \alpha>1} mp^\alpha \ll \sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2},\ SL(m)=p,\ p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}} m\circ p +$$
$$\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\ln(2x)}\sum_{p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}}\sum_{mp^\alpha\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}} mp^{2\alpha} \ll \sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}} m \sum_{p\leqslant\min\left\{m,\ \frac{\sqrt{2x}}{2m}\right\}} p +$$
$$\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\ln(2x)}\sum_{m\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{2}}\sum_{p\leqslant\left(\frac{\sqrt{2x}}{2m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} mp^\alpha \ll x^{\frac{5}{4}} + x\ln^3(2x) \ll 2x^{\frac{5}{4}} \ll x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}.$$

综合以上讨论可以得到

$$\sum_{n\leqslant x} SL(U(n)) = \sum_{m\leqslant \frac{\sqrt{2x}}{2}} m\circ SL(m)+O(x) = \sum_{m\in A} m\circ SL(m)+\sum_{m\in B} m\circ SL(m)+O(x)=$$

$$\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

证毕.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[3] 潘承洞, 潘成彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[4] Jozsef Sandor. On Certain Inequalities Involing the Smarandache Function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[5] 吴启斌. 一个包含 Smarandache 函数的复合函数[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(4): 463-466.

[6] 黄炜. 一个包含 Smarandache 函数的复合函数的均值[J]. 科学技术与工程, 2009, 9(16): 4 570-4 572.

[7] 徐哲峰. Smarandanche 函数的值的分布[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[8] Jian Ge. Mean Value of F. Smarandanche LCM Function[J]. Scientia Mgana, 2007, 3(2): 109-112.

[9] LeMH. An Equation Concerning the Smarandache LCM Function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(1): 186-188.

作者简介:

柴晶霞(1986-)女, 陕西省府谷人, 延安大学数学与计算机学院在读硕士研究生.

。简讯。

刘国汉副院长在庆城县考察

Vice-President Liu Guohan and the Party Inspected the Qingcheng County

9月14日,我院副院长刘国汉一行赴庆城县考察,并代表我院向文化站捐赠400册农业科普书籍,同时与冯毅书记及乡上其他工作人员就进一步深化科技帮扶工作展开交流,初步确定了以食用菌栽培技术、测土施肥技术等为主要内容的帮扶发展方向。自省上调整安排庆城县太白梁乡作为我院对口科技帮扶点以来,院领导和相关处室人员多次到该乡指导帮扶工作,充分发挥我院科技和资源优势,为乡里办好事、办实事,先后协助太白梁乡落实地膜玉米项目资金,赞助乡文化站建设地震受灾小学修复,开展科技项目,救助贫困学生,举办培训班培训基层干部群众,并多次捐款捐物,有力支持和促进了该乡各项工作发展和社会主义新农村建设。我院特别协助庆城县获得易地迁移扶贫资金820万元,受到了县委县政府的好评。

(毛鸿艳　供稿)