DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2014.02.003

第32卷 第2期 2014年4月 | 江 西 科 学 JIANGXI SCIENCE | Vol. 32 No. 2 Apr. 2014

文章编号: 1001－3679(2014)02－0189－04

关于 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的混合均值

鲁伟阳,高 丽*,郝虹斐

(延安大学数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘要: 对任意的正整数 n,著名的 Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!!$,即 $Sdf(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!!\}$。著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\le m(m+1)/2$,即 $Z(n)=\min\{m: m\in N, n\le m(m+1)/2\}$。利用初等方法和解析方法研究了复合函数 $Sdf(Z(n))$ 的均值,并得到一个较强的渐近公式。

关键词: Smarandache 双阶乘函数; 伪 Smarandache 函数; 复合函数; 均值

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A

On the Hybrid Mean Value of the Smarandache Double Factorial Function and the Pseudo-Smarandache Function

LU Wei-yang, GAO Li*, HAO Hong-fei

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Shaanxi Yan'an 716000 PRC)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache double factorial function $Sdf(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n\mid m!!$. That is $Sdf(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!!\}$. And the Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n\le m(m+1)/2$. That is, $Z(n)=\min\{m: m\in N, n\le m(m+1)/2\}$. The main purpose of this paper is to study the mean value properties of the composite function $Sdf(Z(n))$ and give a sharper asymptotic formula by the elementary method and analytic method.

Key words: Smarandache double factorial function, Pseudo-Smarandache function, Composite function, Mean value

1 引言及结论

对任意的正整数 n,著名的 Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!!$,其中 $m!!=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdots m, & 2\nmid n\\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots m, & 2\mid n\end{cases}$,即 $Sdf(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!!\}$。$Sdf(1)=1, Sdf(2)=2, Sdf(3)=3, Sdf(4)=4, Sdf(5)=5, Sdf(6)=6, Sdf(7)=7, Sdf(8)=4, Sdf(9)=9, Sdf(10)=10,$

收稿日期: 2014－01－06; 修订日期: 2014－02－26

作者简介: 鲁伟阳(1989－),男,陕西兴平人,硕士研究生,研究方向: 数论。

基金项目: 陕西省教育厅自然科学基金项目(2013JQ1019); 延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZ2013-04); 延安大学研究生教育创新计划项目。

* 通讯作者: 高 丽(1966－),女,陕西绥德人,教授,硕士生导师,主要从事数论、函数论方面的研究。

…。关于函数 $Sdf(n)$ 的初等性质，有不少学者进行了研究并得到一些重要的结果。例如：乐茂华[1] 给出结论：若 $2|n$，且 $n=2^{\alpha}n_1$，其中 α，n 是正整数，$2\nmid n_1$，则有

$$Sdf(n)\le\max\{Sdf(2^{\alpha}),2Sdf(n_1)\}。$$

沈虹[2] 得到了一个较强的渐近公式 $\sum_{n\le x}Sdf(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right)$。

樊旭辉[3] 也得到一个较强的渐近公式 $\sum_{n\le x}Sdf(n)=\frac{5\pi^2}{48}\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$，其中 e_i 为可计算的常数。

著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\le m(m+1)/2$，即 $Z(n)=\min\{m:m\in N,n\le m(m+1)/2\}$。关于函数 $Z(n)$ 的初等性质，许多学者进行了研究，并获得了不少有意义的结果[4~7]。例如：Yuanbing Lou[6] 研究了一个包含伪 Smarandache 函数的均值问题，得到了一个渐近式：

$$\sum_{n\le x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x)。$$

Lin Cheng[7] 也讨论了一个包含伪 Smarandache 函数的均值，得到渐近式：

$$\sum_{n\le x}\frac{p(n)}{Z(n)}=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_ix}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

吴启斌[8] 讨论了复合函数 $S(Z(n))$ 的均值，得到较强的渐近公式

$$\sum_{n\le x}S(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数，$S(n)$ 为著名的 Smarandache 函数。

刘华[9] 讨论了复合函数 $SL(Z(n))$ 的均值，同样得到一个较强的渐近式

$$\sum_{n\le x}SL(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中，$b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数，$SL(n)$ 为著名的 F Smarandache LCM 函数。

本文主要在上述文献的基础上，利用初等方法和解析方法研究了复合函数 $Sdf(Z(n))$ 的均值问题，并得到一个较强的渐近公式。下面给出本文的主要结论。

定理：设 $k\ge 2$ 是一个给定的整数，则对于任意的实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\le x}Sdf(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中，$a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数。特别地，当 $k=1$ 时，有下面简单的推论成立。

推论：对于任意的实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\le x}Sdf(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

2 相关引理

引理 1[1,10]：设正整数 n 的标准素因数分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，

(1) 若 $2\nmid n$，则有 $Sdf(n)=\max_{1\le i\le k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}$；

(2) 若 $2|n$，且 $n=2^{\alpha}n_1$，其中 α，n 是正整数，$2\nmid n_1$，则有 $Sdf(n)\le\max\{Sdf(2^{\alpha}),2Sdf(n_1)\}$。

引理 2[3]：对任意的正整数 n，若 $P(n)$ 是 n 的最大素因子，那么有如下结论成立：

(1) 当 $P(n)>\sqrt{n}$，且 $2\nmid n$ 时，有 $Sdf(n)=P(n)$；

(2) 当 $P(n)>\sqrt{n}$，且 $2|n$ 时，有 $Sdf(n)=2P(n)$；

(3) 当 $P(n)<\sqrt{n}$时，有 $Sdf(n)<4\sqrt{n}\ln n$。

引理 3[12]：设 $x>1$ 为实数，则有 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_ix}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$，其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数，并且 $c_1=1$。

引理 4[12,13]（**Abel 等式**）：对任一数论函数 $a(n)$，令 $A(x)=\sum_{n\le x}a(n)$，其中当 $x<1$ 时，$A(x)=0$，假设 f 在区间 $[y,x]$ 上有连续导函数，其中 $0<y<x$，那么有

$$\sum_{y<n\le x}a(n)f(n)=A(x)f(x)-A(y)f(y)-\int_y^x A(t)f'(t)dt。$$

引理 5[12]：当 $s>1$ 时，Riemam zeta 函数定义为 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$。显然有 $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

3　定理的证明

对任意的整数 $n>1$，当 $\frac{(m-1)m}{2}+1\le n\le\frac{m(m+1)}{2}$ 时都有 $Z(n)=m$，即方程 $Z(n)=m$ 有 m 个解 $n=\frac{(m-1)m}{2}+1,\frac{(m-1)m}{2}+2,\cdots,\frac{m(m+1)}{2}$。因为 $n\le x$，所以由文献 [1] 可知，当 $Z(n)=m$ 时，$1\le m\le\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}$ 显然成立。由 Smarandache 双阶乘函数的性质可知 $Sdf(n)\le n$，则有

$$\sum_{n\le x}Sdf(Z(n))=\sum_{n\le x,Z(n)=m}Sdf(m)=\sum_{m\le\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}}m\cdot Sdf(m)+O(x)=\sum_{m\le\sqrt{2x}}m\cdot Sdf(m)+O(x)。$$

现将所有整数 $1\le m\le\sqrt{2x}$ 分成 2 个集合 X，Y，其中集合 X 包含所有满足条件: 存在素数 p 使得 $p\mid m$ 的正整数 m，并且 p 满足 $p>\sqrt{n}$；而集合 Y 为包含区间 $[1,\sqrt{2x}]$ 中不属于集合 X 的正整数。在集合 X 中讨论，由引理 1 可知

$$\sum_{n\in A}m\cdot Sdf(m)=\sum_{\substack{m\le\sqrt{2x}\\ p\mid m,\sqrt{m}<p}}m\cdot Sdf(m)=\sum_{mp\le\sqrt{2x},m<p}mp\cdot Sdf(mp)=\sum_{mp\le\sqrt{2x},m<p}mp\cdot p=\sum_{m\le4\sqrt{2x}}m\sum_{m<p\le\frac{\sqrt{2x}}{m}}p^2。$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$，由引理 3 与引理 4 可得

$$\sum_{m<p\le\frac{\sqrt{2x}}{m}}p^2=\frac{2x}{m^2}\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{m}\right)-m^2\pi(m)-\int_m^{\frac{\sqrt{2x}}{m}}2y\pi(y)\,dy=\frac{1}{3}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right),$$

其中，b_i 是可计算的常数，并由引理 4 可知: $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$，则有

$$\sum_{n\in X}Sdf(Z(n))=\frac{1}{3}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{3\ln\sqrt{2x}}\sum_{m\le4\sqrt{2x}}\frac{1}{m^2}+\sum_{m\le4\sqrt{2x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^2\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中，$a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数。

现在讨论集合 Y 的情况，由 Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 的定义及相关性质可知，对 $\forall m\in Y$，若 m 的标准分解式为 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，由引理 2 可知:

$$\sum_{m\le\sqrt{2x},m\in Y}Sdf(m)<\sum_{m\le\sqrt{2x}}4\sqrt{m}\ln m\,x^{\frac{3}{2}}\ln x。$$

因此有

$$\sum_{m\in Y}m\cdot Sdf(m)<\sum_{m\in Y}m\cdot4\sqrt{m}\ln m\le\sum_{m\le\sqrt{2x}}4m^{\frac{3}{2}}\ln m\,x^{\frac{5}{4}}\ln x。$$

综上可知，

$$\sum_{n\le x}Sdf(Z(n))=\sum_{m\le\sqrt{2x}}m\cdot Sdf(m)+O(x)=\sum_{n\in X}m\cdot Sdf(m)+\sum_{n\in Y}m\cdot Sdf(m)+O(x)=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中，$a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数。证毕。

有趣的发现，如果外函数具有与 Smarandache 函数 $S(n)$ 类似的性质，则其与伪 Smarandache 函数的复合函数均值的渐近公式是相同的。

参考文献:

[1] Le M H. A conjecture concerning the smarandache dual function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(3): 153 – 155.

[2] 沈　虹. 一个新的数论函数及其它的均值分布 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 235 – 238.

[3] 樊旭辉, 闫欣荣. 关于 Smarandache 双阶乘 $sdf(n)$ 函数的均值估计 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2013, 14(4): 88 – 90.

[4] Kashihara Kenichiro. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[5] Majumdar A A K. A note on the Pseudo-Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, (3): 1 – 25.

[6] Lou Y B. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, (4): 48 – 50.

[7] Lin Cheng. On the mean value of the Pseudo-Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, (3): 97 – 100.

[8] 吴启斌. 一个包含 Smarandache 函数的复合函数 [J].

(下转第 251 页)

门的工作,也是全省各级地方政府的重要任务。因此,全省各级科技部门要紧紧依靠当地政府,推动资源集聚,落实政策保障,创新推进方式,努力形成全社会关注、支持、参与高新技术产业载体建设的良好氛围。

3.1　提高认识,加强领导

各级科技部门要切实把高新技术产业载体建设摆上重要议事日程,切实加强组织领导。实行省级科技管理部门宏观引导、规划、指导,载体所在市、县人民政府具体推进的管理机制。要实行目标责任制、进展调度制、交流协调制、统计考核制,使建设目标任务落到实处。

3.2　深入调研,明确目标

要深入开展高新技术产业载体建设调研工作,把握全省经济发展全局与地方特色,借鉴兄弟省市先进经验与做法。要围绕江西省产业发展重点、行业和产业布局,战略性、前瞻性地谋划高新技术产业载体建设发展规划,明确发展方向、发展思路、重点领域、发展目标和政策措施,建设和发展一批具有明确产业指向和区域特色的高新技术产业载体。

3.3　总结典型,以点带面

要对现有的高新技术产业载体进行总结评估,发掘其在制订规划政策、建立统计体系、培育高新企业、完善服务体系、加强品牌建设、促进集群发展等方面的好做法。通过树立先进典型,根据全省宏观战略部署和地方发展实际,进一步优化载体的区域布局,指导帮助基础较好的地区培育一批起点高、特色鲜明的省级载体,带动全省载体建设快速发展。

3.4　整合资源,系统联动

要健全高新技术产业载体科技投入机制、税收扶持机制、金融支持机制、部门联动机制,努力形成项目向载体集中,资源向载体整合,资金向载体流动,政策向载体倾斜,服务向载体跟进的发展态势。建立健全高新技术产业载体交流与合作机制,全方位、多层次、多渠道、多方式扩大科技开放合作。

4　结束语

建设高新技术产业载体是提高全省重大创新需求保障能力、促进科技与经济紧密结合、提升科技工作显示度的重要抓手。引导载体面向经济社会发展要求,围绕产业链、创新链合理建设,明确定位,有序发展,形成全省高新技术产业载体科学布局,是当前和今后一段时期科技工作面临的紧迫任务。只要切实加大工作力度,采取有效措施,集成高效推进载体建设,就能显著提升协同创新能力和水平,推进“六个一”工程向纵深发展,为加快科学发展,绿色崛起,建设富裕和谐秀美江西提供有力的科技支撑。

参考文献:

[1] 习近平. 在中共中央政治局举行第九次集体学习的讲话[EB/OL]. http://www.gov.cn/ldhd/2013-10/01/content_2499370.htm.

[2] 刘延东. 完善创新制度 培育创新文化 夯实创新基础 加快科技进步和创新步伐[J]. 中国科技产业,2012,(6):14-15.

[3] 万　钢. 创新驱动与转型发展[J]. 中国流通经济,2013,(6):4-7.

[4] 强　卫. 在中共江西省委十三届七次全体(扩大)会议上的讲话[R]. 南昌:2013-07-22.

[5] 尚　勇. 当代创新力[M]. 北京: 中共中央党校出版社,2010.

(上接第191页)

纯粹数学与应用数学,2007,23(4):463-466.

[9] 刘　华,吕松涛. 一个包含F Smarandache函数的复合函数[J]. 江西科学,2009,27(3):325-327.

[10] Le M H. On the Smarandache double factorial function[J]. Smarandache Notions Journal,2002,13:209-228.

[11] Jozsef Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna,2006,2(3):78-80.

[12] Tom M. Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Spring-Verlag,1976.

[13] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社,1988.