第 28 卷 第 4 期　　延安职业技术学院学报　　2014 年 8 月
Vol.28 No.4　　Journal of Yan'an Vocational & Technical Institute　　Aug. 2014

关于 Smarandache 双阶乘函数的混合均值

王 龙

（陕西广播电视大学延安分校，陕西 延安 716000）

[摘　要] 对任意的正整数 n，Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n\mid m!!$，即 $Sdf(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!!\}$。而函数 $U(n)$ 为最小的正整数 k，使得 $n\le k(2k-1)$，即 $U(n)=\min\{k: n\le k(2k-1), k\in N_+\}$。本文主要通过初等和解析方法，研究了复合函数 $Sdf(U(n))$ 的均值，并得到一个较强的渐近式。

[关键词] Smarandache 双阶乘函数；渐近公式；复合函数；均值

[中图分类号] O156.4　　**[文献标识码]** A　　**[文章编号]** 1674-6198(2014)04-0095-02

DOI:10.13775/j.cnki.cn61-1472/g4.2014.04.039

一、引言与结论

对任意的正整数，F.Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 被定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!!$，即 $Sdf(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!!\}$．则 $Sdf(1)=1$，$Sdf(2)=2$，$Sdf(3)=3$，$Sdf(4)=4$，$Sdf(5)=5$，…．容易得到

$$m!!=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdots m, & 2\nmid n\\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots m, & 2\mid n\end{cases},$$

近几年许多学者对函数 $Sdf(n)$ 的初等性质进行了研究，并得到不少有趣的结论[1-4]．例如：乐茂华在文献[1]研究了函数 $Sdf(n)$ 的问题中得到：若 $2\mid n$，且 $n=2^{\alpha}n_1$，其中 α，n 是正整数，$2\nmid n_1$，则有

$$Sdf(n)\le \max\{Sdf(2^{\alpha}), 2Sdf(n_1)\}.$$

文献[5]中沈虹研究了 $Sdf(n)$ 的均值问题，证明了对任意给定的正整数 k，以及任意实数 $x>2$ 有渐近式

$$\sum_{n\le x} Sdf(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

文献[6]中樊旭辉也研究了 $Sdf(n)$ 的均值问题，得到较强的渐近公式

$$\sum_{n\le x} Sdf(n)=\frac{5\pi^2}{48}\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $e_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数．

文献[7]中鲁伟阳等人研究了复合函数 $Sdf(Z(n))$ 的均值问题，证明了对任意的实数 $x>1$，$k\ge 2$ 是一个给定的整数，有渐近式

$$\sum_{n\le x} Sdf(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数．

函数 $U(n)$ 定义为最小的正整数 k，使得 $U(n)=\min\{k: n\le k(2k-1), k\in N\}$．我们的主要目的是研究 Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$ 与 $U(n)$ 的混合均值问题，并得到一个渐近式．

定理：设 $j\geqslant 2$ 为给定的整数，则对任意的实数 $x>1$，有渐近式

$$\sum_{n\le x} Sdf(U(n))=\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{j}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{j+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,j)$ 是可计算的常数．

二、定理的证明

下面我将用初等和解析的方法给出证明．

对任意的整数 $n>1$，当 $k(2k+1)\le n\le (k+1)(2k+1)$ 时都有 $U(n)=k$．也就是说方程 $U(n)=k$ 有 $4k+1$ 个解 $n=k(2k-1)+1$，$k(2k-1)+2$，…，$(k+1)(2k+1)$．因为 $n\leqslant x$，所以由文献[8]知，当 $U(n)=k$ 时，k 满足 $1\le k\le \frac{\sqrt{8x+1}+1}{4}$，即有 $k=\frac{\sqrt{2x}}{2}+O(1)$，于是注意到 $Sdf(n)\le n$，有

$$\sum_{n\le x} Sdf(U(n))=\sum_{n\le x, U(n)=k} Sdf(k)=\sum_{k\le\frac{\sqrt{8x+1}+1}{4}} k\cdot Sdf(k)+O(x)=\sum_{k\le\frac{\sqrt{2x}}{2}} k\cdot Sdf(k)+O(x)$$

将所有整数 $1\le k\le\frac{\sqrt{2x}}{2}$ 分为两个集合 P 和 Q，其中集合 P 包含所有满足存在素数 p 使得 $p|k$，且 $p>\sqrt{k}$ 的正整数 k；集合 Q 包含区间 $[1,\frac{\sqrt{2x}}{2}]$ 中不属于集合 P 的那些正整数，利用文献[1]中性质得

$$\sum_{k\le\frac{\sqrt{2x}}{2}} k\cdot Sdf(k)=\sum_{k\in P} k\cdot Sdf(k)=\sum_{k\in Q} k\cdot Sdf(k)$$

首先计算集合 P 的情况

$$\sum_{k\in P} k\cdot Sdf(k)=\sum_{\substack{k\in P\\ p|k,\sqrt{k}<p}} k\cdot Sdf(k)=\sum_{kp\le\frac{\sqrt{2x}}{2},k<p} kp\cdot Sdf(kp)=\sum_{kp\le\frac{\sqrt{2x}}{2},k<p} kp\cdot p$$

$$=\sum_{k\le 2\sqrt{2x}} k\sum_{k<p\le\frac{\sqrt{2x}}{2k}} p^2 .$$

令 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$，利用 Abel 求和公式、（下转第 111 页）

[收稿日期] 2014-07-01

[作者简介] 王龙（1981-）男，陕西延安人，陕西广播电视大学延安分校讲师。

接近于一个充满神性体验色彩的理想主义者；从认知方式上，他接近于一个‘狂人’式的先知。在诗学观念上，他深受尼采、海德格尔等人的影响，相信‘酒神体验’的力量，相信‘大地’原始伟大的本质力量 在艺术观念上，他又特别认同梵高、荷尔德林那种疯狂的气质。”

“更加重要的是加强了的组织，把形式因素的各种不同效果全部组成一个单一的反应的能力提高了，这是诗人的赐予”

于是海子诗歌最不可思议的魅力简直不可言说。他的语言全是真实的、自然的，正在生长的，全不用古奥或晦涩的字词，但它们的组合腾挪逼近极限，他用陈述语气直接说出万物，却能赋予孤立的字句以硬度冲击，他将现代诗歌中的现代性品格继续高扬，发出知识精英的遗子之音，事实上在他之后诗歌的神性、雕琢性几已流失殆尽，各种主义嘈嘈过耳而堪堪难承检验。

参考文献

[1] 谷海慧．接续与断裂 中国当代文学现象专题研究[M]．北京：社会科学文献出版社，2011．

[2] 燎原．海子评传[M]．北京：中国戏剧出版社，2011．

[3] 崔卫平编．不死的海子[C]．北京：中国文联出版公司，1999．

[4] 唐小林．看不见的签名 现代汉语诗学与基督教[M]．北京：中国社会科学出版社；北京市：华龄出版社，2004．

[5] 金松林．悲剧与超越 海子诗学新论[M]．桂林：广西师范大学出版社，2010．

[6] 悠哉．海子诗歌研究[M]．天津：百花文艺出版社，2009．

[7] 高万云．中国修辞理论与批评[M]．济南：山东人民出版社，2004．

[8] 龙泉明．中国新诗流变论 1917-1949[M]．北京：人民文学出版社，1999．

[9] 洪子诚，刘登翰编著．中国当代新诗史[M]．北京：北京大学出版社，2010．

[10] 中国修辞学会编．修辞学探新[C]．香港文化教育出版社有限公司，1995．

[11] 罗振亚．中国现代主义诗歌史论[M]．北京：社会科学文献出版社，2002．

(上接第 95 页) 素数定理及分部积分法得

$$\pi(x)=\sum_{i=1}^{j}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{j+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,j)$ 为常数且 $c_1=1$，则有

$$\sum_{k<p\le\frac{\sqrt{2x}}{2k}}p^2=\frac{x}{2k^2}\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{2k}\right)-k^2\pi(k)-\int_k^{\frac{\sqrt{2x}}{2k}}2y\pi(y)dy$$

$$=\frac{\pi^2}{24}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{k^3\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{j}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i k}{k^3\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{k^3\ln^{j+1}x}\right),$$

其中 a_i 为可计算的常数.并且可得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$，则有

$$\sum_{n\in P}Sdf(U(n))=\frac{1}{24}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}\sum_{k\le2\sqrt{2x}}\frac{1}{k^2}+\sum_{k\le2\sqrt{2x}}\sum_{i=2}^{j}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i k}{k^2\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{j+1}x}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{j}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{j+1}x}\right)$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,j)$ 是可计算常数.

下面讨论集合 Q 的情况，由 $Sdf(n)$ 函数的定义及性质可以知道，对于 $\forall k\in Q$，设 k 的标准分解式为 $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，我们对的奇偶性进行讨论.当 $2|n$ 时有

$$Sdf(k)=\max_{1\le i\le s}\left\{Sdf(2^{\alpha_i})\right\}=\max_{1\le i\le s}\left\{2\alpha_i\right\},$$

当 $2\nmid n$ 时有

$$Sdf(k)=\max_{1\le i\le s}\left\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\right\}=\max_{1\le i\le s}\left\{(\alpha_i p_i\right\},$$

此时取 $Sdf(k)=p\le\sqrt{n}$，显然有 $Sdf(k)<<\sqrt{k}\ln k$，以及 $\alpha\le\ln n$，于是就有 $Sdf(k)<<\sqrt{k}\ln k$.

所以有 $\sum_{k\in Q}k\cdot Sdf(k)\le\sum_{k\in Q}k\cdot\sqrt{k}\ln k\le\sum_{k\le\frac{\sqrt{2x}}{2}}k^{\frac{3}{2}}\ln k\le x^{\frac{5}{4}}\ln x$,

综上可知，

$$\sum_{n\le x}Sdf(U(n))=\sum_{k\le\frac{\sqrt{2x}}{2}}k\cdot Sdf(k)+O(x)=\sum_{n\le P}k\cdot Sdf(k)+\sum_{n\le Q}k\cdot Sdf(k)+O(x)$$

$$=\frac{\pi^2}{144}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{j}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{j+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,j)$ 是可计算的常数.

参考文献

[1] Le Maohua.A Conjecture Concerning the Smarandache Dual Function[J].Smarandache Notions Journal,2004,14(3):153-155.

[2] 张文鹏.初等数论[M].西安:陕西师范大学出版社,2007.

[3] Tom M.Apostol.Introduction to analytic number theory.New York:Spring-Verlag,1976.

[4] 潘承洞,潘承彪.素数定理的初等证明[M].上海:上海科学技术出版社,1988.

[5] 沈虹.一个新的数论函数及其它的均值分布[J].纯粹数学与应用数学,2007,23(2):235-238.

[6] 樊旭辉,闫欣荣.关于 Smarandache 双阶乘 sdf(n)函数的均值估计[J].空军工程大学学报(自然科学版),2013,14(4):88-90.

[7] 鲁伟阳,高丽等.关于 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的混合均值[J].江西科学,2014,32(2):189-191.

[8] Jozsef Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006,2(3):78-80.