关于 Smarandache 双阶乘对偶函数的四次加权均值

王　阳，王　婷

(南阳师范学院 数学与统计学院，河南 南阳 473061)

摘　要：通过对正整数 n 奇偶性的讨论，研究了 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 四次方幂加权均值的分布性质. 利用初等方法得到两个渐近公式，补充了有关文献的结论.

关键词：Smarandache 双阶乘对偶函数；均值；渐近公式

中图分类号：O 156.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001—8735(2015)02—0149—03

1　引言及结论

对任意正整数 n，F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 n 整除 m !关于 $S(n)$ 的性质文献[1-3]进行了研究，得到了若干重要的结论. 在此基础上，文献[4]将函数 $S(n)$ 进行了对偶推广，给出 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的定义，即当正整数 n 为偶数时，$S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m$，使得 $(2m)$!!整除 n；当正整数 n 为奇数时，$S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m-1$ 使得 $(2m-1)$!!整除 n. 也就是

$$S^{**}(n)=\begin{cases}\max\{2m:(2m)\,!!\,|\,n, m\in \mathbf{N}^{+}\}, & 2\mid n,\\ \max\{2m-1:(2m-1)\,!!\,|\,n, m\in \mathbf{N}^{+}\}, & 2\nmid n.\end{cases}$$

其中 $(2m)!!=2\times4\times6\times\cdots\times(2m)$，$(2m-1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2m-1)$. 关于 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 的性质文献[4-6]进行了初步研究，得到了几个有趣的渐近公式及恒等式. 本文的主要目的是利用初等方法研究 Smarandache 双阶乘对偶函数 $S^{**}(n)$ 四次方幂加权均值的分布性质，得到以下结论.

定理 1　给定 $l\geqslant 0$，则对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}n^{l}\,(S^{**}(n))^{4}=\frac{1}{2(1+l)}\Big(105+64\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)\,!!}\Big)x^{1+l}+O\Big(x^{l}\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^{5}\Big).$$

定理 2　给定 $l>0(l\neq 1)$，则对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{(S^{**}(n))^{4}}{n^{l}}=\frac{1}{2(1-l)}\Big(105+64\,\mathrm{e}\,\frac{1}{2}+32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)\,!!}\Big)x^{1-l}+O\Big(x^{-l}\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^{5}\Big).$$

推论 1　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S^{**}(n))^{4}=\frac{1}{2}\Big(105+64\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)\,!!}\Big)x+O\Big(\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^{5}\Big).$$

推论 2　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{(S^{**}(n))^{4}}{n^{\frac{1}{2}}}=\Big(105+64\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)\,!!}\Big)x^{\frac{1}{2}}+O\Big(x^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^{5}\Big).$$

2　定理的证明

证明　当 n 为奇数时，设 $S^{**}(n)=2m-1$，由 $S^{**}(n)$ 的定义可知 $n=(2m-1)\,!!\,t$，其中 $2m+1\nmid t$，$2\nmid t$. 因此，当 $n\leqslant x$ 时，必有 $(2m-1)\,!!\leqslant x<(2m+1)\,!!$. 利用公式[7] $\ln m\,!=m\ln m-m+O(\ln m)$，通过

收稿日期：2014-08-26

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071194，11426140)；河南省自然科学基金资助项目(132300410372)

作者简介：王　阳(1962—)，女，河南省南阳市人，南阳师范学院教授，主要从事数论研究，E-mail：wangyang621211@126.com.

计算可得

$$m=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\Big(\frac{\ln x\ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}\Big). \tag{1}$$

所以

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\nmid n}}(S^{**}(n))^4=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ S^{**}(n)=2m-1}}(S^{**}(n))^4=\sum_{\substack{(2m-1)!!t\leqslant x\\ 2m+1\nmid t\\ 2\nmid t}}(2m-1)^4=\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}(2m-1)^4\sum_{\substack{t\leqslant\frac{x}{(2m-1)!!}\\ 2m+1\nmid t\\ 2\nmid t}}1=$$

$$\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}(2m-1)^4\Big(\frac{x}{2(2m-1)!!}-\frac{x}{2(2m+1)!!}\Big)+O\Big(\sum_{(2m-1)!!\leqslant x}(2m-1)^4\Big)=$$

$$\frac{x}{2}\sum_{(2m-)!!\leqslant x}\Big(\frac{(2m-1)^4}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)+O\Big(\sum_{m\leqslant\frac{\ln x}{\ln\ln x}}(2m-1)^4\Big)=$$

$$\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{(2m-1)^4}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)+O\Big(x\sum_{(2m-1)!!>x}\Big(\frac{(2m-1)^4}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)\Big)+$$

$$O\Big(\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^5\Big). \tag{2}$$

设 $k=\min\{m:x<(2m-1)!!\}$，则必有 $(2k-3)!!\leqslant x<(2k-1)!!$. 类似(1)式的计算，有

$$k=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\Big(\frac{\ln x\ln\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}\Big). \tag{3}$$

又

$$\sum_{(2m-1)!!>x}\Big(\frac{(2m-1)^4}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)=\sum_{m=k}^{\infty}\Big(\frac{(2m-1)^4}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)=$$

$$\frac{(2k-1)^4}{(2k-1)!!}+\sum_{m=k}^{\infty}\Big(\frac{(2m+1)^4}{(2m+1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)=$$

$$\frac{(2k-1)^4}{(2k-1)!!}+\sum_{m=k}^{\infty}\frac{8(2m+1)^3-24(2m+1)^2+32(2m+1)-16}{(2m+1)!!}=$$

$$\frac{(2k-1)^4}{(2k-1)!!}+\sum_{m=k}^{\infty}\frac{8(2m-1)^2+8(2m-1)+16}{(2m-1)!!}-16\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}=$$

$$\frac{(2k-1)^4}{(2k-1)!!}+\frac{8(2k-1)^2+8(2k-1)+16}{(2k-1)!!}+\sum_{m=k}^{\infty}\frac{8(2m+1)^2+8(2m+1)}{(2m+1)!!}=$$

$$\frac{(2k-1)^4}{(2k-1)!!}+\frac{8(2k-1)^2}{(2k-1)!!}+\frac{16(2k-1)}{(2k-1)!!}+\frac{48}{(2k-1)!!}+32\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}. \tag{4}$$

注意到

$$\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\leqslant\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\pi}{(2m)!!}<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\pi x^{-1}, \tag{5}$$

结合(3)－(5)式，可得

$$x\sum_{(2m-1)!!>x}\Big(\frac{(2m-1)^4}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)\ll\frac{(\ln x)^4}{(\ln\ln x)^4}. \tag{6}$$

从而

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\nmid n}}\big(S^{**}(n)\big)^4=\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{(2m-1)^4}{(2m-1)!!}-\frac{(2m-1)^4}{(2m+1)!!}\Big)+O\Big(\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^4\Big)+O\Big(\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^5\Big)=$$

$$\frac{1}{2}\Big(73+32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\Big)x+O\Big(\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^5\Big).$$

令

$$A=\frac{1}{2}\Big(73+32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!!}\Big),$$

则

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\mid n}}(S^{**}(n))^4=Ax+O\Big(\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big)^5\Big).$$

因此当 $l \geqslant 0$ 时，由 Able 求和公式可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\nmid n}} n^l \left(S^{**}(n)\right)^4 = x^l\left(Ax + O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^5\right)\right) - 1 - l\int_1^x\left(At + O\left(\left(\frac{\ln t}{\ln\ln t}\right)^5\right)\right)t^{l-1}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2(1+l)}\left(73 + 32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)\,!!}\right)x^{1+l} + O\left(x^l\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^5\right). \tag{7}$$

同理可证

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\nmid n}} n^l \left(S^{**}(n)\right)^4 = \frac{1}{1+l}(16 + 32\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}})x^{1+l} + O\left(x^l\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^5\right). \tag{8}$$

根据(7) 式和(8) 式，可得

$$\sum_{n\leqslant x} n^l \left(S^{**}(n)\right)^4 = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\nmid n}} n^l \left(S^{**}(n)\right)^4 + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2\nmid n}} n^l \left(S^{**}(n)\right)^4 =$$

$$\frac{1}{2(1+l)}\left(105 + 64\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)\,!!}\right)x^{1+l} + O\left(x^l\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^5\right).$$

定理 1 得证.

同理可证定理 2. 当 $l = 0$ 时由定理 1 可得推论 1. 当 $l = \frac{1}{2}$ 时由定理 2 可得推论 2.

参考文献：

[1] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布［J］. 数学学报，2006，49(5)：1009-1012.

[2] 李粉菊，杨畅宇. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计［J］. 西北大学大学学报：自然科学版，2011，41(4)：377-379.

[3] 李毅君. 一个新的 Smarandache 函数的均值［J］. 内蒙古师范大学学报：自然科学汉文版，2012，41(3)：244-246.

[4] 苟素，杜晓英. 关于 Smarandache 对偶函数［J］. 纯粹数学与应用数学，2008，24(1)：17-20.

[5] 杨衍婷. 一个数论函数的均值问题［J］. 黑龙江大学自然科学学报，2008，25(3)：340-342.

[6] 王阳. Smarandache 双阶乘对偶函数的恒等式［J］. 南阳师范学院学报. 2012，11(12)：11-13.

[7] 潘承洞，潘承彪. 初等数论［M］. 北京：北京大学出版社，1999：441.

On the 4-th Weighted Mean Value of the Smarandache Double Factorial Dual Function

WANG Yang，WANG Ting

(*College of Mathematics and Statistics*，*Nanyang Normal University*，*Nanyang* 473061，*Henan*，*China*)

Abstract：The asymptotic properties of the 4-th weighted mean value of the Smarandache double factorial dual function $S^{**}(n)$ are studied by using classifyingnwhich is positive integer into odd and even. Two asymptotic formula are obtained by using elementary methods，and some related conclusions are supplemented in some references.

Key words：Smarandache double factorial dual function；mean value；asymptotic formula

【责任编辑 陈汉忠】