2008年3月
第24卷 第1期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Mar. 2008
Vol.24 No.1

关于 Smarandache 对偶函数

苟 素[1]，杜晓英[2]

(1. 西安邮电学院应用数理系, 陕西 西安 710061; 2. 西北大学数学系, 陕西 西安 710127)

摘 要: 定义 Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 为最大的正整数 m 使得 $m! \mid n$. 定义另一种双阶乘函数 $S^{**}(n)$ 为最大的正整数 $2m-1$ 使得 $(2m-1)!! \mid n$, 其中 $2\dagger n$; 且当 $2 \mid n$ 时, 为最大的正整数 $2m$ 使得 $(2m)!! \mid n$. 本文的主要目的是利用初等方法研究一个包含 $S^{**}(n)$ 的无穷级数的收敛性, 并给出一个有趣的恒等式.

关 键 词: Smarandache 对偶函数; 无穷级数; 恒等式

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2008)01-0017-04

1 引言及结论

定义 Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 为最大的正整数 m 使得 $m! \mid n$, 其中 n 为任意的正整数, 也就是

$$S^*(n) = \max\{m:\ m! \mid n\ ,\ m \in \mathbf{N}\}$$

关于这个问题, 不少作者作过研究, 并且得到了一些有意义的结论. 例如, 在文 [1] 中,J.Sandor 做了这样一个猜想, 即提出了对正整数 k 和在 $2k+1$ 之后的第一个素数 q 有

$$S^*\left((2k-1)!(2k+1)!\right) = q-1$$

后来这个命题被文 [2] 所证实.

在文 [3] 中, 李洁研究了一个包含 $S^*(n)$ 的无穷级数的敛散性, 并获得了一个恒等式. 即就是对任意的实数 $\alpha \le 1$, 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^\alpha}$ 是发散的, 当 $\alpha > 1$ 时是收敛的. 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^\alpha}$$

其中 $\zeta(\alpha)$ 是 Riemann zeta- 函数.

现在我们定义另一种双阶乘函数 $S^{**}(n)$ 如下

$$S^{**}(n) = \begin{cases} \max\{2m-1:\ (2m-1)!! \mid n\ ,\ m \in \mathbf{N}\},\ 2 \dagger n \\ \max\{2m:\ (2m)!! \mid n\ ,\ m \in \mathbf{N}\}, 2 \mid n \end{cases}$$

我们发现这个函数与 $S^*(n)$ 有着非常相似的性质. 在这篇文章中, 就是想说明这一点, 即就是利用初等方法研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 的收敛性质, 并给出一个有趣的恒等式. 即就是证明下面的

收稿日期: 2006-11-10 .

基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).

作者简介: 苟 素 (1972-), 副教授, 研究方向: 基础数学.

定理 对于任意实数 $s>1$, 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 是收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s}$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数.

由上面的定理我们立刻获得下面的

推论 当 $s=2,\ 4$ 时, 我们有恒等式

$$\text{(i)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^2}+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^2}+\frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{(ii)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^4}+\frac{\pi^4}{45}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^4}+\frac{\pi^4}{96}$$

2 定理的证明

首先, 如果 $s>1$, 由 $S^{**}(n)<<\ln n$ 可得狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 是收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}+\sum_{\substack{n=1\\2\mid n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$$

由 $S^{**}(n)$ 的定义知当 n 为奇数时, 如果 $S^{**}(n)=2m-1$, 则 $(2m-1)!!\mid n$. 我们令 $n=(2m-1)!!\cdot n_1$ 且 $(2m+1)\nmid n_1$. 那么对于任意实数 $s>1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n\\S^{**}(n)=2m-1}}^{\infty}\frac{2m-1}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n\\(2m+1)\nmid n}}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s\cdot n^s}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n\\(2m+1)\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^s\cdot n^s}\right)\\
&= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m+1)!!)^s}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m+1}{((2m+1)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m+1)!!)^s}\right)$$

$$= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)$$

$$= \zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right) \tag{1}$$

当 n 为偶数时, 如果 $S^{**}(n)=2m$, 则 $(2m)!!\mid n$. 现在我们令 $n=(2m)!!\cdot n_2$ 且 $(2m+2)\dagger n_2$. 那么对于任意实数 $s>1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n=1\\2|n}}^{\infty}\frac{S^{*}(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2|n\\S^{**}(n)=2m}}^{\infty}\frac{2m}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\(2m+2)\dagger n}}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s\cdot n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}\sum_{\substack{n=1\\(2m+2)\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+2)^s\cdot n^s}\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m+2)!!)^s}\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+2)!!)^s}\right)$$

$$= \zeta(s)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+2)!!)^s}\right)=\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s} \tag{2}$$

结合 (1) 式和 (2) 式立刻得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}+\sum_{\substack{n=1\\2|n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$$

$$= \zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s}$$

于是就完成了定理的证明.

当 $s=2,4$ 时, 注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$,$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ (见文 [4-5]) 我们容易算出下面的式子

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^2} &= \zeta(2)\cdot\frac{3}{4}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^2}\right)+\zeta(2)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{8}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^2}\right)+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^2}+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^2}+\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^4}+\frac{\pi^4}{45}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^4}+\frac{\pi^4}{96}$$

参考文献

[1] Sandor J. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 11: 202-212.

[2] Le Maohua. A conjecture concerning the Smarandache dual functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 153-155.

[3] Li Jie. On Smarandache dual functions[J]. Scientia Magna, 2006(2): 111-113.

[4] Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[5] 赵院娥. 一个新的数论函数及其均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(2): 163-166.

On the Smarandache dual functions

GOU Su [1], DU Xiao-ying[2]

(1. Department of Applied Mathematics and Physics, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an 710061, China; 2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, the Smarandache dual function $S^*(n)$ is defined as the greatest positive m such that $m!$ divides n. And further we defined another Smarandache dual function $S^{**}(n)$ as follows: If $2\nmid n$, then $S^{**}(n)$ be the greatest positive $2m-1$ with $(2m-1)!!$ divides n; if $2\mid n$, then $S^{**}(n)$ be the greatest positive $2m$ with $(2m)!!$ divides n. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the convergent properties of an infinity involving $S^{**}(n)$, and give an interesting identity for it.

Keywords: Smarandache dual functions, infinity series, identity

2000MSC: 11B83