关于 Smarandache幂函数的混合均值

贺艳峰

(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘 要:利用解析方法研究了包含 Smarandache幂函数倒数的混合均值,并给出了它的渐近公式。

关键词: Smarandache幂函数; Euler乘积; Riemann zeta函数
中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1004-602X(2008)01-0001-02

1 引言及结论

对任意正整数 n, Smarandache幂函数 $SP(n)$定义为:

$$SP(n)=\min\{m: n|m^m, m\in N\}$$

当 n取遍自然数时,由 $SP(n)$便得到了如下的一个数列: 1, 2, 3, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 10, 11, 6, 13, 14, …, 在[1]中 Smarandache教授让我们研究数列 $SP(n)$的性质。通过简单验证,得到 $SP(n)$的一个性质:

如果 $n=p^\alpha$,则有

$$SP(n)=\begin{cases} p, & \text{如果 } 1\le\alpha\le p;\\ p^2, & \text{如果 } p+1\le\alpha\le 2p^2;\\ p^3, & \text{如果 } 2p^2+1\le\alpha\le 3p^3;\\ \cdots & \\ p^p, & \text{如果 } (\alpha-1)p^{p-1}. \end{cases}$$

如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$,且对所有的 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$都有 $\alpha_i\le p_i$,那么 $SP(n)=U(n)$,其中 $U(n)=\prod_{p|n}p$。$SP(n)$不是可乘函数,例如 $SP(8)=4$, $SP(3)=3$,然而 $SP(3\times8)=6\ne SP(8)\times SP(2)$. 可是 $\frac{\mu(n)}{SP(n)}$却是可乘的。在文献[2]中,对于任意实数 $x\ge1$,徐哲峰研究了 $SP(n)$的均值性质及与 $d(n)$和 $\phi(n)$的复合均值性质。Huanqin Zhou在文献[3]中得到了包含 $SP(n)$的一个无穷级数的恒等式。

本文利用解析的方法得到了 $SP(n)$的倒数的两个混合均值公式,即就是:

定理
$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{SP(n)}=x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

及
$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{SP^k(n)}=x^{1-k}+O(x^{\frac{1}{2}-k+\epsilon}).$$

2 一个简单引理

为了完成定理的证明,我们需要下面这个简单引理:

引理[4] (Perron公式)设存在递增函数 $H(u)$及函数 $B(u)$使得

$$|a(n)|\le H(n),\quad n=1,2\cdots,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|n^{-\sigma}\le B(\sigma)$$

那么对任意的 $s_0=\sigma_0+it_0$及 $b_0>\sigma_a$,当 $b_0\ge0$, $b_0>\sigma_0+b>\sigma_a$, $T\ge1$及 $x\ge1$时有:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|n^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{x^s}{s}ds$$
$$+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)$$
$$+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right).$$

其中 $A(n)=\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|n^{-s}$, N是离 x最近的整数(x

收稿日期: 2007-07-02
作者简介: 贺艳峰(1976—),女,陕西神木人,延安大学讲师。

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

是半奇数时，取 $N = x - \frac{1}{2}$)，$\| x\| = \| N - x\|$.

3 定理的证明

现在我们来完成定理的证明。令 $a(n) = \frac{\mu(n)}{SP(n)}$，则由于 $a(n)$ 的可乘性，利用[5]中的 Euler 乘积公式得：

$$A(n) = \sum_{n=1}^{\infty} | a(n) | n^{-s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^{s}}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta 函数。在引理中，取 $s_0 = 0$, $b = \frac{3}{2}$, $T = x$, $B(s) = \zeta(s)$, $H(u) = 1$，有

$$\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{SP(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} A(s_0 + s)\frac{x^{s}}{s}ds + O\left(\frac{x^{b}B(b)}{T}\right)$$

$$+ O\left(x^{1-\sigma_0} H(2x)\min\left(1, \frac{\log x}{T}\right)\right)$$

$$+ O\left(x^{-\sigma_0} H(N)\min\left(1, \frac{x}{T\| x\|}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT} A(s)\frac{x^{s}}{s}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^{s}}{s}ds.$$

将积分线从 $s = \frac{3}{2} \pm iT$ 移到 $s = \frac{1}{2} \pm iT$ 来估计主项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^{s}}{s}ds,$$

这时，函数
$$f(s) = \frac{x^{s}}{\zeta(s)s}$$
在 $s = 1$ 处有一个一阶极点，留数为 x 所以

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT} + \int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right)\frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^{s}}{s}ds = x.$$

容易求得估计式

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right)\frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^{s}}{s}ds \right|$$

$$\ll \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| \frac{1}{\zeta(\sigma + iT)}\frac{x^{\sigma}}{T}\right| d\sigma \ll \frac{x^{\frac{3}{2}}}{T} = x^{\frac{1}{2}},$$

和

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}\frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^{s}}{s}ds \right| \ll \int_{0}^{T} \left| \frac{1}{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{t}\right| dt$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

我们可得

$$\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{SP(n)} = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

我们取 $a(n) = \frac{\mu(n)}{SP^{k}(n)}$，用同样方法我们得到

$$\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{SP^{k}(n)} = x^{1-k} + O\left(x^{\frac{1}{2}-k+\epsilon}\right).$$

于是就完成了定理的证明。

参考文献：

[1] F. Smarandache. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Xu Zhefeng. On the Mean Value of the Smarandache Power Function[J]. ACTA MATHE-MATICA SINICA (Chinese series), 2006, 49(1): 77-80.

[3] Huaning Zhou. An Infinite Series Involving the Smarandache Power Function SP(n)[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 109-112.

[4] Pan chengdong and Pan chengbiao. The Elementary Number Theory[M]. Beijing: University Press, Beijing, 2003.

[5] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[责任编辑 贺小林]

On the Hybid Mean Value Formula Involving Smarandache Power Function

HE Yan-feng

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan, Shaanxi 716000)

Abstract: Using the elementary methods to study the hybid mean value involving Smarandache power function, and gives an asymptotic formula.

Key words: Smarandache power function; Euler product; Riemann zeta-function

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net