文章编号: 1003-2843(2008)01-0042-03

关于 Smarandache 平方余函数的一个问题

胡岚, 杨仕椿
(阿坝师范高等专科学校数学系, 四川汶川 623000)

摘　要: 对于正整数函数 n, 设函数 $SSC(n)$为 n 的 Smarandanche 平方余函数, 即为使 mn 为平方数的最小正整数 m. 本文利用 Pell 方程的解的性质, 以及 Modell 方程的解的深刻结论, 证明了, 对于任意正整数 b, 当 $n\to +\infty$时, $|SSC(n+b)-SSC(n)|$ 是无界的, 从而推广了 F. Russo 提出的一个问题的答案.

关键词: Smarandache 平方余函数, 差,　Pell 方程, Modell 方程, Russo 问题
中图分类号: O156.1　　　　文献标识码: A

1　及主要结论

设 Z, N 分别表示全体整数、正整数的集合. 1980 年, 美籍罗马尼亚数学家 F. Smarandache 引入一类新的数论函数—Smarandache 函数 $S_k(n)$, 即[1]

定义1　$S_k(n)=\min\{m: k^n \mid m!, m, n, k\in N\}$, 并提出了许多问题, 引起了许多学者的浓厚兴趣和广泛研究[1-4].

1994 年, C Dumitrescu, Seleacu V[5] 提出了正整数 n 的 Smarandnche 平方余函数 $SSC(n)$的定义, 即为使 mn 为平方数的最小正整数 m, 有

定义 2　$SSC(n)=\min\{m \mid mn=A^2, m, n, A\in N\}$, 并对该类数论函数进行了详细的研究, 许多学者也获得了这方面的许多结果[5-6].

2002 年, F. Russo[6]提出了关于 Smarandnche 平方余函数的差的一个问题

问题　当 $n\to +\infty$时, $|SSC(n+1)-SSC(n)|$ 有界还是无界？

在文献[7]中, 乐茂华回答了这个问题, 他证明了当 $n\to +\infty$时, $|SSC(n+1)-SSC(n)|$ 无界的. 一个自然的问题是, 对任意正整数 b, 当 $n\to +\infty$时, $|SSC(n+b)-SSC(n)|$ 有界还是无界的？本文研究了这一问题, 利用 Pell 方程的解的性质以及 Modell 方程的解的深刻结论, 构造性的给出了以上问题的否定答案, 从而推广了 F. Russo 提出的问题的答案.

本文的主要结论是

定理　对任意正整数 b, 当 $n\to +\infty$时,　$|SSC(n+b)-SSC(n)|\to +\infty$.

2　一些引理

引理 1　设 $D, b\in N$, D 无平方因子, 若方程

收稿日期：2007-10-30
作者简介：胡岚(1986-）, 女, 四川叙永人, 阿坝师范高等专科学校数学系助教, 主要从事代数及数论研究; 杨仕椿(1969-), 男, 四川西充人, 阿坝师范高等专科学校数学系副教授, 主要从事代数及数论研究.
基金项目：四川省教育厅自然科学基金资助(2006C057).

$$x^2 - D\,y^2 = b,\ x,\ y \in N \tag{1}$$

有一个最小正整数解(x_1, y_1), 则方程(1)有无穷多个正整数解, 且所有解(x, y)可以表示为

$$x + \sqrt{D}\,y = (x_1 + \sqrt{D}\,y_1)\,(u + \sqrt{D}\,v)^k$$

其中, $u + \sqrt{D}\,v$ 是方程 $x^2 - D\,y^2 = 1$ 的基本解, k 为任意正整数.

证明　见文献[8-10].

引理 2　若 a, b, d 为给定的整数, $b \neq 0$, 则方程

$$a\,x^3 + b = d\,y^2,\ x,\ y \in Z \tag{2}$$

仅有有限多个解(x, y).

证明　在方程(2)中, 令 $X = 36adx, Y = 216ad^2y, B = 216^2 a^2bd^3$, 则方程(2)化为

$$X^3 + B = Y^2 \tag{3}$$

但由文献[8-11]的结论可知, Modell 方程(3)的解(X, Y)是有限的, 且满足

$$\max\{|X|, |Y|\} < \exp(10^{10}\ |B|^{10^4})$$

因此, 对于任意给定的 a, b, d, 方程(2)的解(x, y)是有限的, 则其解数是有限的.

3　定理的证明

由于任意正整数均 n 可表为 $n = D\,y^2$, 其中 $D, y \in N$, 且 D 无平方因子. 于是对任意 $x_0, b \in N$, b 给定, 可令 $x_0^6 - b = Dy^2$, D 无平方因子. 下面来证明, 当 $x_0 \to +\infty$时, 有 $D \to +\infty$. 否则, 设当 $x_0 \to +\infty$时, $D \le D_0$, 这里 D_0 是一个确定的常数, 考虑方程

$$x^2 - b = D_1\,y^2,\quad x,\ y \in N,\ D_1 \le D_O \tag{4}$$

由于 b, D_1 给定且有限, 则由引理 2 可得, 方程(4)的解(x, y)是有限的, 即 $x \le C_1$, C_1 仅与 b, D_1 有关的常数. 由于 D_1 的个数有限, 于是无论 D_1 取任意 $D_1 \le D_0$ 的值, (4)的解(x, y)总是有限的, 即 $x \le C_1$. 但方程(2)有解(x_0^2, y_0), 而 $x_0 \to +\infty$, 矛盾！

于是对任意给定的正整数 b, 一定存在无穷多个正整数 D, 使得 D 无平方因子, 且满足

$$x_0^6 - b = Dy^2,\ x_0,\ y \in N, \tag{5}$$

对于每一个这样的无平方因子数 D, 设 $u + \sqrt{D}\,v$ 是方程 $x^2 - D\,y^2 = 1$ 的基本解, (x_0, y_0)是方程 $x_0^6 - b = Dy^2$ 的最小正整数解, 则由引理 1 可得, 方程 $x^2 - Dy^2 = b$ 的所有解(x_k, y_k)满足

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (x_0^{\ 3} + \sqrt{D}\,y_0)\ (u + \sqrt{D}\,v)^k \tag{6}$$

这里 k 为正整数. 于是

$$\mathrm{SSC}\,(D\,y_k^{\ 2}) = D,\quad \mathrm{SSC}\,(D\,y_k^2 + b) = \mathrm{SSC}\,(x_k^{\ 2}) = 1$$

则令 $n = D\,y_k^{\ 2}$, 当 $D \to +\infty$时, $n \to +\infty$, 有

$$|\,\mathrm{SSC}(n+b) - \mathrm{SSC}(n)\,| = D - 1 \to +\infty$$

于是定理成立.

参考文献:

[1]　SMARANDACHE F. A function in the theory [J]. Ann Timisoara Univ Ser Math, 1980, 28(1): 79-88.

[2]　SMARADACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 41-42.

[3] AMARNTH MURTHY. Generalized Partitions and New Ideas On Number Theory and Smarandache Sequences[M]. Hexis, 2005: 20-22.

[4] ZHANG WENPENG, LIU DUANSEN. On the primitive numbers of power p and its asymp-totic property[J]. Smaradache Notions, Book series, 2002, 13: 173-175.

[5] DUMITRESCU C, SELEACU V. Some notion and questions in number theory[M]. Phoenix: Xiquan Pub House, 1994.

[6] RUSSO F. An instroduction to the Smaransache square complementary function[J]. Smaransache Notion J, 2002, 13: 160-173.

[7] LE MAOHUA. On the Diffrence Of The Smarandache Square Complementary Function[J]. Journal Of Qinghal Jeachers' College, 2004, 5: 5.

[8] MORDELL L J. Diophantine Equations[M]. London: Academic Press, 1969.

[9] TOM M, APOSTOL. Introduction to Analytic Number Theory[M]. Springer-Verlag, New York, 1976.

[10] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京：科学出版社, 1979.

[11] 乐茂华. Gel'found-Baker 方法在丢番图方程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 44-45.

On the problem of the diference of the Smarandache square complementary function

HU Lan, YANG Shi-chun

(Department of Mathematics, Aba Teacher's College, Wenchuan 623000, P. R. C.)

Abctract: For any positive integer n let SSC(n) denote the smarandache square complem-entary function of n, then SSC(n) = min $\{m \mid mn = A^2, m, n, A \in N\}$. In this paper, using the results of the solutions of Pell equation and Modell's equation, we prove that | SSC($n + b$) –SSC (n) | is unbounded.

Key words: Smarandache square complementary function; difference; Pell equation; Modell equation; Russo's problem