2011年 第 32卷 第 4期 中 北 大 学 学 报 (自然科学版) Vol. 32 No. 4 2011
(总第 138期) JOURNAL OF NORTH UNIVERSITY OF CHINA(NATURAL SCIENCE EDITION) (Sum No. 138)

文章编号: 1673-3193(2011) 04-0411-03

关于 Smarandache平方列极限问题的研究*

余亚辉, 李振平

(洛阳理工学院 数理部, 河南 洛阳 471023)

摘 要: Smarandache平方列问题的研究在数论中占有重要的地位. 研究了 Smarandache平方列的一些极限问题, 并用初等方法解决了关于 Smarandache平方列的极限 $\lim_{n\to\infty}(S_n-I_n)$ 的敛散性问题.

关键词: Smarandache平方列; 极限; 敛散性

中图分类号: O156.1 文献标识码: A **doi** 10.3969/j.issn.1673-3193.2011.04.005

Limit Problem of Smarandache Square Sequences

YU Ya-hui, LI Zhen-ping

(Dept. of Mathematics and Physics, Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang 471023, China)

Abstract The research of Smarandache square sequences plays an important role in number theory. Some problems of the limits about Smarandache square sequences were studied, and with elementary method the property of convergence and divergence of which $\lim_{n\to\infty}(S_n-I_n)$ was solved.

Key words Smarandache square sequences; limit; convergence and divergence

1 问题的提出

Smarandache平方列有两种类型: Smarandache最大平方列和 Smarandache最小平方列. 对任意的正整数 n, Smarandache最大平方列 $SSSP(n)$ 定义为大于或等于 n 的最小完全平方数, 该数列的前几项为: 0, 1, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 25,… ; Smarandache最小平方列 $SISP(n)$ 定义为小于或等于 n 的最大完全平方数, 该数列的前几项是: 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 16,… .

记
$$S_n=\frac{SSSP(1)+SSSP(2)+\cdots+SSSP(n)}{n},$$
$$I_n=\frac{SISP(1)+SISP(2)+\cdots+SISP(n)}{n}.$$

在文献 [1]中, Smarandache教授提出了这两个数列的概念. 在文献 [2]中, Kenichiro Kashihara博士建议人们研究以下两个问题:

问题 1 讨论极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{I_n}$ 的敛散性.

问题 2 讨论极限 $\lim_{n\to\infty}(S_n-I_n)$ 的敛散性.

对于问题 1, 参考文献 [3]进行了讨论, 得到 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{I_n}=1$; 但对于问题 2, 目前还未有成果出现, 本文

* 收稿日期: 2010-12-10
基金项目: 河南省教育厅自然科学基金资助项目 (2009B110013); 洛阳理工学院青年基金资助项目 (2008QZ07)
作者简介: 余亚辉 (1982-), 男, 讲师, 硕士. 主要从事数论及其应用研究.

用初等方法[4-13]来研究问题 2.

2 问题的讨论与证明

对任意的正整数 $n>2$, 一定存在唯一的正整数 M, 满足

$$M^2<n\leqslant(M+1)^2, \tag{1}$$

即 $M=O(\sqrt{n})(n\to\infty)$, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant n}SSSP(k)=&\sum_{k\leqslant M^2}SSSP(k)+\sum_{M^2<k\leqslant n}SSSP(k)=\\&\sum_{l\leqslant M}\sum_{(l-1)^2<k\leqslant l^2}SSSP(k)+\sum_{M^2<k\leqslant n}(M+1)^2=\\&\sum_{l\leqslant M}(l^2-(l-1)^2)l^2+(n-M^2)(M+1)^2=\\&\sum_{l\leqslant M}(2l^3-l^2)+(n-M^2)(M+1)^2=\\&\frac{M^2(M+1)^2}{2}-\frac{M(M+1)(2M+1)}{6}+(n-M^2)(M+1)^2=\\&\frac{1}{2}M^4+\frac{2}{3}M^3-\frac{1}{6}M+(n-M^2)(M+1)^2= \qquad (2)\\&\frac{n^2}{2}+O(n^{3/2}). \qquad (3)\end{aligned}$$

同理, 对于任意的正整数 $n>2$, 必然存在唯一的正整数 N, 满足

$$N^2\leqslant n<(N+1)^2, \tag{4}$$

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant n}SISP(k)=&\sum_{k<N^2}SISP(k)+\sum_{N^2\leqslant k\leqslant n}SISP(k)=\\&\sum_{l\leqslant N}\sum_{(l-1)^2<k\leqslant l^2}SISP(k)+\sum_{N^2\leqslant k\leqslant n}N^2=\\&\sum_{l\leqslant N}(l^2-(l-1)^2)(l-1)^2+(n-N^2+1)N^2=\\&\sum_{l\leqslant N}(2l^3-5l^2+4l-1)+(n-N^2+1)N^2=\\&\frac{N^2(N+1)^2}{2}-\frac{5N(N+1)(2N+1)}{6}+2N(N+1)-N+(n-N^2+1)N^2=\\&\frac{1}{2}N^4-\frac{2}{3}N^3+\frac{1}{6}N+(n-N^2+1)N^2= \qquad (5)\\&\frac{n^2}{2}+O(n^{3/2}). \qquad (6)\end{aligned}$$

这里对 n 为非完全平方数和 n 为完全平方数这两种情况分别来讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-I_n)$.

当 n 为非完全平方数时, 式(1)~(6)中 $M=N$, 根据 S_n及 I_n的定义, 由式(2)和(5)可得

$$\begin{aligned}S_n-I_n=&\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n}SSSP(k)-\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n}SISP(k)=\\&\frac{1}{n}\left[\frac{4}{3}M^3-\frac{M}{3}+(n-M^2)(M+1)^2-(n-M^2+1)M^2\right]=\\&\frac{1}{n}\left[2nM-\frac{2}{3}M^3+n-2M^2-\frac{M}{3}\right]=\\&2M-\frac{2M^3}{3n}+1-\frac{2M^2}{n}-\frac{M}{3n}.\end{aligned}$$

注意到, $M = O(\sqrt{n})\ (n \to \infty)$, 所以

$$S_n - I_n = O(\sqrt{n}),$$

则

$$\lim_{n \to \infty}(S_n - I_n) = \infty.$$

当 n 为完全平方数时, 式 (1)~ (6)中的 $N = M + 1$, 根据式 (2)和 (5)可得

$$S_n - I_n = \frac{1}{n}\sum_{k \leqslant n} SSSP(k) - \frac{1}{n}\sum_{k \leqslant n} SISP(k) = \frac{1}{n}\Big[\frac{M^4}{2} + \frac{2}{3}M^3 - \frac{M}{6} + (n - M^2)(M + 1)^2 - \frac{(M + 1)^4}{2} + \frac{2}{3}(M + 1)^3 - \frac{M + 1}{6} - (n - (M + 1)^2 + 1)(M + 1)^2\Big] = \frac{1}{n}\Big[\frac{4}{3}M^3 + 3M^2 + \frac{5}{3}M\Big].$$

根据 $M = O(\sqrt{n})\ (n \to \infty)$, 可知 $S_n - I_n = O(\sqrt{n})$, 因此可得

$$\lim_{n \to \infty}(S_n - I_n) = \infty.$$

综合以上两种情况的讨论, 可得当 $n \to \infty$ 时, $(S_n - I_n) \to \infty$, 并且 $S_n - I_n = O(\sqrt{n})$.

3 结束语

本文讨论并解决了 Kenichiro Kashihara 博士提出的关于 Smarandache 平方列的极限 $\lim_{n \to \infty}(S_n - I_n)$ 的敛散性问题. 从上面的讨论和证明, 得到了当 $n \to \infty$ 时 Smarandache 最大平方列与最小平方列的均值的差 $S_n - I_n$ 将趋向于无穷大, 并且其趋向于无穷大的速度与 $\sqrt{n}$ 同阶.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Kenichiro Kashihara. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[3] 苟素. 关于 $SSSP(n)$ 和 $SISP(n)$ 的均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(3): 431-434.
Gou Su. On the mean values of $SSSP(n)$ and $SISP(n)$ [J]. Pure and Applied Mathematics, 2009, 25(3): 431-434. (in Chinese)

[4] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[5] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[6] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[7] Yan Xiaoxia. On the Smarandache prime part [J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 74-77.

[8] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[9] Zhang Wenpeng. On an Equation of smarandache and its integer solu-tions [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1-2-3): 176-178.

[10] Vyawahare A W. Near pseudo smarandache funchion [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 42-59.

[11] Maohua Le. On the Smarandache double factorial function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 1(1-2-3): 37-42

[12] 张文鹏. 关于 F. Smarandache函数的两个问题 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2008, 38(2): 173-175.
Hang Wenpeng. On two problems of the Smarandache function J [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2008, 38(2): 173-175. (in Chinese)

[13] Heath-Brown D R. The differences between consecutive primes [J]. Journal of London Math. Soc., 1978, 18(2): 7-13.