DOI:10.13467/j.cnki.jbuns.2006.03.006

宝鸡文理学院学报(自然科学版),第26卷,第3期,第187-188页,2006年9月
Journal of Baoji University of Arts and Sciences (Natural Science), Vol.26, No.3, pp.187-188, Sept.2006

关于 Smarandache 平方补函数有关的问题*

王琴琴
(西安石油大学 理学院,陕西 西安 710065)

摘 要:目的 研究与 Smardache 平方补函数相关的若干问题。方法 主要利用 Smarandache 平方补函数的性质。结果 回答了 Russo 提出的相关问题,并相应的给予了证明。结论 解决了 Russo 提出的 6 个问题。

关键词:Smarandache 函数,平方补函数,渐进公式
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1007-1261(2006)03-0187-02

The problems concerning Smarandache square complementary function

WANG Qin-qin
(School of Science, Xián Shiyou University, Xi'an 710065, Shaanxi, China)

Abstract: **Aim** To study the problems concerning the Smarandache square complementary function. **Methods** The properties of Smarandache square complementary function were used to resolve the problems. **Results** The problems that had been put forward by Russo were answered and they were proved. **Conclusion** The 6 problems were put forward by Russo have been resolved.

Key words: Smarandache function; square complementary function; asymaptotic fomula
MSC 2000: 11B57

Smarandache 平方补函数定义为: $Ssc(n)=m$,其中 m 是使得 mn 为完全平方数的最小的正整数(见[1]或[2])。文献[3]曾对这一函数的性质进行过研究,并得到较好的结果。本文主要是对与 $Ssc(n)$ 有关的几个问题进行研究。

1 关于差式 $|Ssc(n+1)-Ssc(n)|$

在[3]中,Russo 提出了下面的 2 个问题:

问题 1 $|Ssc(n+1)-Ssc(n)|$ 是否有界?

问题 2 函数 $Ssc(n)$ 是否为 Lipschitz 函数?

对任意的正整数 m 和 k,如果函数 $f(n)$ 满足

$$\frac{|f(m)-f(k)|}{|m-k|}\geqslant M$$

其中 M 为任意的正整数,则此函数被称为 Lipschitz 函数[4]。

现在来解答上面的 2 个问题。

定理 1 $|Ssc(n+1)-Ssc(n)|$ 是无界的。

证明 对任意的整数 $r\geqslant 1$,设 $n=2^{2^r}$,由平方补函数的定义我们容易看出 $Ssc(n)=1$。根据不等式

$$Ssc(n+1)\neq Ssc(n),$$

我们知道 $n+1$ 不是一个完全平方数,则存在一个素数 q,使得

$$2\nmid\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{q^k}\right],$$

即 q 幂为奇数。

另一方面,$n+1=2^{2^r}+1$ 为 Fermat 数,根据[3]中定理 5.12.1 的证明,$n+1$ 的任一素因子 q 都形如 $q=2^{r+1}l+1$,其中 l 为正整数。

由此可以推出 $q\geqslant 2^{r+1}+1$。

由于 Smarandache 平方补函数是可乘的,即

$$Ssc(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t})=Ssc(p_1^{\alpha_1})\circ Ssc(p_2^{\alpha_2})\cdots Ssc(p_t^{\alpha_t}),\ (p_i,p_j)=1。$$

则有

$$Ssc(n+1)=Ssc(2^{2^r}+1)\geqslant q\geqslant 2^{r+1}+1,$$

* 收稿日期:2006-03-13,修回日期:2006-05-31. E-mail: wpiqq926@126.com
作者简介:王琴琴(1976-),女,陕西临潼人,讲师,硕士,研究方向:解析数论.

从而有

$$|Ssc(n+1)-Ssc(n)|\geqslant 2^{r+1},$$

由此可以推断 $|Ssc(n+1)-Ssc(n)|$ 是无界的。定理 1 得证。

作为定理 1 的一个直接结果, 可以得到下面的结论:

推论 1 Smarandache 平方补函数 $Ssc(n)$ 不是 Lipschitz 函数。

2 与 Ssc(n) 有关的 diophantine 方程

文[3] 中 Russo 提出了下面几个与 $Ssc(n)$ 函数有关的 diophantine 方程有关的问题。

问题 3 找出方程 $Ssc(n)=Ssc(n+1)\circ Ssc(n+2)$ 的所有解。

问题 4 解方程

$$Ssc(n)\circ Ssc(n+1)=Ssc(n+2)。$$

问题 5 是否存在非负整数 m, n, k 使得方程 $Ssc(m\circ n)=m^k\circ Ssc(n)$ 成立。

问题 6 求解方程:

$$Ssc(n)^r+Ssc(n)^{r-1}+\cdots Ssc(n)=n,$$

其中 $r\geqslant 2$ 为整数。

现在我们对上面的问题逐一进行讨论:

定理 2 方程 $Ssc(n)=Ssc(n+1)\circ Ssc(n+2)$ 无解。

证明 用反证法。假设 n 为方程的解。一方面, 如果 $n+1$ 为完全平方数, 由方程可知

$$Ssc(n)=Ssc(n+1)=Ssc(n+2)=1,$$

这就得出矛盾。

另一方面, 如果 $n+1$ 不是完全平方数, 设 p 是 $n+1$ 的素因子且 p 的幂为奇数, 由平方补函数的性质有 $p\mid Ssc(n+1)$。由假定有 $p\mid Ssc(n)$, 这就说明 p 也是 n 的素因子, 然而由于 $(n, n+1)=1$, 所以得出矛盾, 从而说明方程

$$Ssc(n)=Ssc(n+1)\circ Ssc(n+2)$$

无解。

用类似的方法我们可以得出定理 3。

定理 3 方程 $Ssc(n)\circ Ssc(n+1)=Ssc(n+2)$ 无解。

定理 4 对任意的正整数 k, 方程 $Ssc(m\circ n)=m^k\circ Ssc(n)$ 有无穷多个解。

证明 设 $m=m_1^2p_1p_2\cdots p_r$ 及 $n=n_1^2q_1q_2\cdots q_t$, 由平方补函数的性质, 有 $Ssc(n)\leqslant n$, 从而

$$m^kSsc(n)=m_1^{2k}(p_1p_2\cdots p_r)^kq_1q_2\cdots q_t,$$

$$Ssc(m, n)\leqslant p_1p_2\cdots p_r\circ q_1q_2\cdots q_t$$

$$\Rightarrow m_1^{2k}(p_1p_2\cdots p_r)^kq_1q_2\cdots q_t\leqslant$$

$$p_1p_2\cdots p_r\circ q_1q_2\cdots q_t$$

$$\Rightarrow k=1。$$

所以 $m=p_1p_2\cdots p_r$ 其中 $p_i(i=1, 2, \cdots, r)$ 为不同的素数, 取 $k=1$, n 为任意与 m 互素的正整数, 则方程的解可以表达为:

$$(m, n, k)=(p_1p_2\cdots p_r, n, 1)。$$

证毕。

定理 5 对于任意的整数 $r\geqslant 2$, 方程

$$Ssc(n)^r+Ssc(n)^{r-1}+\cdots+Ssc(n)=n$$

只有 2 个解。

证明 假设 n 是方程的解, 令 $n=n_1^2p_1p_2\cdots p_t$, 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 为 n 的不同的素因子且 $(p_i, p_j)=1$。由平方补函数的性质, 我们有 $Ssc(n)=p_1p_2\cdots p_t$, 这时

$$Ssc(n)^r+Ssc(n)^{r-1}+\cdots+Ssc(n)=n$$

$$\Rightarrow(p_1p_2\cdots p_t)^r+(p_1p_2\cdots p_t)^{r-1}+\cdots+(p_1p_2\cdots p_t)=n_1^2p_1p_2\cdots p_t$$

$$\Rightarrow(p_1p_2\cdots p_t)^{r-1}+(p_1p_2\cdots p_t)^{r-2}+\cdots+(p_1p_2\cdots p_t)+1=n_1^2$$

$$\Rightarrow\frac{(p_1p_2\cdots p_t)^r-1}{p_1p_2\cdots p_t-1}=n_1^2。$$

如果 $r>2$, 则 $(p_1p_2\cdots p_t, n_1, r)=(3, 11, 5)$, 即 $n=363$, $r=5$。

不然 $r=2$, 则 $p_2p_2\cdots p_t-1=n_1^2$, 从而方程只有 2 个解。

证毕。

参考文献:

[1] WEISSTEIN E. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics[M]. CRC Press, 1999.

[2] SMARANDACHE F. Only Problems, not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[3] FELICE RUSSO. An introduction to the Smarandache square complementary function [J]. *Smaradache Notional Journal*, 2002, (13): 160-172.

[4] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[5] Maohua Le. On the Smarandache double function [J]. *Smaradache Notional Journal*, 2002, (13): 209-228.

[6] Maohua Le. On the pseudo-Smarandache squarefree function [J]. *Smaradache Notional Journal*, 2002, (13): 229-236.

(编校: 李宗红)