DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2009.05.004
2009年9月 渭南师范学院学报 Sept. 2009
第24卷 第5期 Journal of Weinan Teachers University Vol.24 No.5

关于 Smarandache 平方补数函数的一个问题

路玉麟，魏艳红

（渭南师范学院 数学与信息科学系，陕西 渭南 714000）

摘 要：对任意正整数 n，著名的 Smarandache 平方补数函数 $Ssc(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $m\cdot n$ 为完全平方．即就是 $Ssc(n)=\min\{m: m\in Z^+, m\cdot n=k^2, k\in Z^+\}$．Felice Russo 在《An introduction to the Smarandache Square Complementary function》中建议我们研究极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}$ 的存在问题．如果存在，确定其极限．本文的主要目的就是利用初等方法研究这一问题，并得到彻底解决，即就是证明该极限存在且为 1．

关键词：Smarandache 平方补数函数；初等方法；极限

中图分类号：O156.4 文献标志码：A 文章编号：1009-5128(2009)05-0011-02

收稿日期：2008-06-02

基金项目：渭南师范学院重点科研计划项目（08YKF021）；渭南师范学院科研计划项目（09YKS008）

作者简介：路玉麟（1976- ），男，陕西澄城人，渭南师范学院数学与信息科学系讲师，理学硕士．

对任意的正整数 n，著名的 Smarandache 平方补数函数 $Ssc(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $m\cdot n$ 为完全平方．即就是 $Ssc(n)=\min\{m: m\in Z^+, m\cdot n=k^2, k\in Z^+\}$．[1] 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache 教授在他所著的《Only Problems, Not Solution》一书中引入的，并建议人们研究它的性质！从 $Ssc(n)$ 的定义容易推出：

如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示正整数 n 的标准分解式，那么

$$Ssc(n)=p_1^{odd(\alpha_1)}p_2^{odd(\alpha_2)}\cdots p_r^{odd(\alpha_r)},\quad 其中：odd(\alpha)=\begin{cases}1 & 如果\ \alpha\ 为奇数\\ 0 & 如果\ \alpha\ 为偶数\end{cases}.$$

由此我们不难计算出 $Ssc(n)$ 的前几个值为：

$Ssc(1)=1$，$Ssc(2)=2$，$Ssc(3)=3$，$Ssc(4)=1$，$Ssc(5)=5$，$Ssc(6)=6$，$Ssc(7)=7$，$Ssc(8)=2$，$Ssc(9)=1$，$Ssc(10)=10$，$Ssc(11)=11$，$Ssc(12)=3$，$Ssc(13)=13$，$Ssc(14)=14$，$Ssc(15)=15$，$Ssc(16)=1$，$Ssc(17)=17$，$Ssc(18)=2$，$Ssc(19)=19$，$Ssc(20)=5$，……[2] 关于 $Ssc(n)$ 的算术性质，许多学者进行了研究，获得了不少有趣的结果，见参阅文献[3][4]．

现在对任意的正整数 $n>1$，我们考虑和式：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k} \tag{1}$$

Felice Russo 在文献[2]中建议我们研究当 $n\to\infty$ 时，(1)式的极限是否存在？如果存在，确定其值．关于这一问题，至今似乎没有人研究，至少我们没有看到过有关方面的论文．本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题，并得到彻底解决！具体地说也就是证明了：

定理 对任意的正整数 $n>1$，我们有估计式：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

显然这是一个比解决文献[1]中问题更强的结论．由此定理我们立刻得到下面的：

推论 对任意的正整数，我们有极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}=1.$$

证明 令 $U(n)=\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}$．

首先我们估计 $U(n)$ 的上界．事实上当 $n>1$ 时，由 $Ssc(n)$ 的定义我们不难推出 $Ssc(n)$ 表示 n 的所有不同素因数中指数为奇数的素因数的乘积，所以对任意的正整数 k 有：$Ssc(k)\leqslant k$ 及 $\ln(Ssc(k))\leqslant\ln k$，从而有估计式：

$$U(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}=n-1\leqslant n \qquad (2)$$

其次我们估计 $U(n)$ 的下界. 对任意的正整数 $n>1$, 设 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ 为 n 的标准分解式. 我们将区间 $[2, n]$ 中的所有整数分成两个子集 A 及 B, 其中 A 表示区间 $[2, n]$ 中所有满足条件 a_i $(i=1, 2, \cdots, r)$ 为偶数的正整数的集合; B 表示区间 $[2, n]$ 中满足至少有一个 a_i $(i=1, 2, \cdots, r)$ 为奇数的正整数的集合. 于是我们有:

$$U(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln n}=\frac{1}{\ln n}\sum_{k\in A}\ln(Ssc(k))+\sum_{k\in B}\ln(Ssc(k)) \qquad (3)$$

显然由集合 A 的定义可知: $$\frac{1}{\ln n}\sum_{k\in A}\ln(Ssc(k))\leqslant\sum_{k\in A}\ln k=0 \qquad (4)$$

另一方面, 对于任意的 $n\in B$, 一定存在一个素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $\left(p, \frac{n}{p}\right)=1$. 同时注意到素数定理的几种不同形式: (参阅文献 [5] [6] [7]).

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p}=\ln n+O(1);\ \sum_{p\leqslant n}\ln p=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right) \text{ 及 } \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p^2}=D+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

其中 D 为正常数, 于是我们有估计式:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in B}\ln(Ssc(k))&=\sum_{\substack{pm\leqslant n\\(p,m)=1}}\ln(Ssc(pm))=\sum_{\substack{pm\leqslant n\\(p,m)=1}}(\ln p+\ln(Ssc(m)))\\&\geqslant\sum_{\substack{pm\leqslant n\\(p,m)=1}}\ln p=\sum_{p\leqslant n}\ln p\sum_{k\leqslant\frac{n}{p}}1\geqslant\sum_{p\leqslant n}\ln p\left(\frac{n}{p}-\frac{n^2}{p}+O(1)\right)\end{aligned} \qquad (5)$$

由 (3)、(4) 及 (5) 式我们有估计式:

$$U(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}=\frac{1}{\ln n}\sum_{k\in B}\ln(Ssc(k))\geqslant\frac{1}{\ln n}(n\ln n+O(n))=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right) \qquad (6)$$

结合 (2) 及 (6) 式我们立刻推出渐近公式: $\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}=1+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$

于是完成了定理的证明. 推论可以理解为定理中取 $n\to\infty$.

参考文献:

[1] F. Smarandache. Only Problems, Not Solution[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Felice Russo. An introduction to the Smarandache Square Complementary function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002 (13): 160—173.

[3] Maohua Le. Some problems concerning the Smarandache square complementary function(I)[J]. Smarandache Notions Journal, 2004 (14): 220—221.

[4] Maohua Le. Some problems concerning the Smarandache square complementary function(II, III, IV, V)[J]. Smarandache Notions Journal, 2004 (14): 330—340.

[5] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Teory[M]. New York: Spring—Verlag, 1976.

[6] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[7] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[责任编辑 舒尚奇]

On A Problem of Smarandache Square Complementary Function

LIU Yu-lin, WEI Yan-hong

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan 714000, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache Square Complementary function $Ssc(n)$ is define as: $Ssc(n)=m$, where m is the smallest value such that $m\cdot n$ is a perfect square. In《An introduction to the Smarandache Square Complementary function》, Felice Russo suggests to determine the limit $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Ssc(k))}{\ln k}$. In this paper, this problem is solved completely and it proves that its limit is 1.

Key words: Smarandache Square complementary function; elementary method; limit