DOI:10.15886/j.cnki.hdxbzkb.2011.01.015

文章编号:1004-1729(2011)01-0004-04

关于 Smarandache 指数函数 $e_p(n)$ 与除数和函数 $\sigma_t(n)$ 的混合均值

屈芝莲
(宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘　要: 利用初等方法研究了 $e_p(n)$ 与除数和函数 $\sigma_t(n)$ 的混合均值,得到了 $\sum\limits_{n\leqslant x} e_p(n)\sigma_t(n)$ 的渐近公式.

关键词: Smarandache 指数函数; 均值; 渐近公式
中图分类号: O 156.4　　　**文献标志码**: A

对于任意给定的素数 p 及正整数 n,Smarandache 指数函数 $e_p(n)$ 定义为最大的正整数 α 使得 p^α 整除 n,即

$$e_p(n) = \max\{\alpha : p^\alpha \mid n\}.$$

著名数论学家 Smarandache F 教授在文献[1]的第68个问题中要求研究数列$\{e_p(n)\}$的性质,关于这个问题文献[2-5]已作了初步的研究,得到了如下的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} e_p^m(n) = \frac{p-1}{p}a_p(m)x + O(\log^{m+1}x),$$

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n)\phi(n) = \frac{3p}{(p^2-1)\pi^2}x^2 + O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}),$$

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n)d(n) = \frac{2}{p-1}x\ln x + \frac{2(2\gamma-1)(p-1)-2p\ln p}{(p-1)^2}x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

$$\sum_{n\leqslant x} ((n+1)^m - n^m)e_p(n) = \frac{m}{(p-1)(m+1)}x + O(x^{1-\frac{1}{m}}),$$

其中,$m\geqslant 0$为给定的整数,$a_p(n)$ 是一个可计算的常数,$\varphi(n)$ 为 Euler 函数,$d(n)$ 为除数函数,ε为任意给定的正数. 文献[6]研究了无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(n)}{n^s}$的收敛性,得到了恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_p(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{p^s-1}.$$

设 $\sigma_t(n) = \sum\limits_{d\mid n} d^t$,$d$ 为 n 的正约数,t 为正整数. 本文利用初等方法研究了 $\sum\limits_{n\leqslant x} e_p(n)\sigma_t(n)$ 的渐近性质,得到了一个有趣的渐近公式. 具体如下:

定理1　对任意的实数 $x\geqslant 1$ 及给定的整数 $t\geqslant 1$,有渐近公式
当 $t>1$ 时,

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n)\sigma_t(n) = \frac{(p^{t+1}+p-2)\zeta(t+1)}{(p-1)(p^{t+1}-1)}x^{t+1} + O(x^t\ln x);$$

收稿日期: 2010-10-13
作者简介: 屈芝莲(1958-),女,陕西扶风人,宝鸡职业技术学院副教授.

当 $t = 1$ 时,

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n)\sigma_t(n) = \frac{(p+2)\pi^2}{6(p^2-1)}x^2 + O(x\ln^3 x).$$

1 引理及证明

设 p 为给定的素数,$\zeta(s)$ 为 Riemann Zeta-函数. 为了完成定理 1 的证明,需要下列引理

引理 1 对任意的实数 $x \geqslant 1$ 及给定的整数 $t \geqslant 1$,有渐近公式

当 $t > 1$ 时,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}} \sigma_t(n) = x^{t+1}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\zeta(t+1) + O(x^t);$$

当 $t = 1$ 时,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}} \sigma_t(n) = x^{t+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\zeta(t+1) + O(x^t\ln x).$$

证明 设 $\mu(n)$ 为 Mobius 函数 , 由文献[7]知

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}, \tag{1}$$

$$\sum_{n\leqslant x} n^s = \frac{x^{s+1}}{s+1} + O(x^s), s \geqslant 0, \tag{2}$$

根据式(1) 和(2) ,有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}} n^t = \sum_{n\leqslant x} n^t \sum_{d|(n,p)}\mu(d) = \sum_{d|p} d^t\mu(d) \sum_{m\leqslant x/d} m^t = \sum_{d|p} d^t\mu(d)\left(\frac{x^{t+1}}{d^{t+1}} + O(x^t d^{-t})\right) =$$
$$x^{t+1}\sum_{d|p}\frac{\mu(d)}{d} + O(x^t),$$

由于 p 为素数,故

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}} n^t = \left(1-\frac{1}{p}\right)x^{t+1} + O(x^t), \tag{3}$$

又 $t \geqslant 1$ 时,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{t+1}} = \zeta(t+1) + O(x^{-t}), \tag{4}$$

所以由式(1) 和(4) ,可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\frac{1}{n^{t+1}} = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^{t+1}}\sum_{d|(n,p)}\mu(d) = \sum_{d|p}\frac{\mu(d)}{d^{t+1}}\sum_{m\leqslant x/d}\frac{1}{m^{t+1}} = \sum_{d|p}\frac{\mu(d)}{d^{t+1}}(\zeta(t+1) + O(x^{-t}d^t)),$$

即

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\frac{1}{n^{t+1}} = \zeta(t+1)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right) + O(x^{-t}), t > 1, \tag{5}$$

同理,可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\frac{1}{n} = \left(1-\frac{1}{p}\right)(\ln x + \gamma) + O(x^{-1}), \tag{6}$$

根据式(3) 、(5) 和(6) 有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\sigma_t(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\sum_{d|n} d^t = \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\sum_{\substack{d\leqslant x/n\\(d,p)=1}} d^t = \sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\left(\frac{x^{t+1}}{n^{t+1}}\left(1-\frac{1}{p}\right) + O(x^t n^{-t})\right) =$$

$$x^{t+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\frac{1}{n^{t+1}}+O\left(x^{t}\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\frac{1}{n^{t}}\right),$$

从而当 $t>1$ 时,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\sigma_t(n)=x^{t+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\zeta(t+1)+O(x^t),$$

当 $t=1$ 时,

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,p)=1}}\sigma_t(n)=x^{t+1}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\zeta(t+1)+O(x^t\ln x).$$

引理 1 得证.

引理 2[3] 设 α 为任意的正整数,p 为给定的素数,那么对任意的实数 $x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\frac{\alpha}{p^{\alpha}}=\frac{p}{(p-1)^2}+O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$

$$\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\frac{\alpha^2}{p^{\alpha}}=\frac{p^2+p}{(p-1)^2}+O\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right).$$

引理 3 设 α 为任意的正整数,p 为给定的素数,那么对任意的实数 $x\geqslant 1$ 及给定的整数 $t\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\frac{\alpha}{p^{\alpha(t+1)}}=\frac{p^{t+1}}{(p^{t+1}-1)^2}+O\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

证明 设 $f=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\alpha}{p^{(t+1)\alpha}}=\frac{1}{p^{t+1}}+\frac{2}{p^{2(t+1)}}+\cdots+\frac{\alpha}{p^{\alpha(t+1)}}+\cdots$, 则

$$f\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)=\frac{1}{p^{t+1}}+\frac{1}{p^{2(t+1)}}+\cdots+\frac{1}{p^{n(t+1)}}+\cdots=\frac{1}{p^{t+1}-1},$$

从而 $f=\frac{p^{t+1}}{(p^{t+1}-1)^2}$,所以

$$\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\frac{\alpha}{p^{(t+1)\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p^{(t+1)n}}-\sum_{\alpha>\ln x/\ln p}\frac{n}{p^{(t+1)n}}=\frac{p^{t+1}}{(p^{t+1}-1)^2}+O\left(\frac{1}{p^{(t+1)\ln x/\ln p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x/\ln p+n}{p^{(t+1)n}}\right)=$$
$$\frac{p^{t+1}}{(p^{t+1}-1)^2}+O\left(\frac{\ln x}{x^{t+1}}\right).$$

引理 3 得证.

2 定理的证明

由 $\mathrm{e}_p(n)$ 的定义及引理 1、引理 2 和引理 3,有

当 $t>1$ 时,

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}_p(n)\sigma_t(n)=\sum_{p^{\alpha}\leqslant x}\alpha\sigma_t(p^{\alpha})\sum_{\substack{u\leqslant x/p^{\alpha}\\(u,p)=1}}\sigma_t(u)=$$

$$\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\alpha\sigma_t(p^{\alpha})\left\{\frac{x^{t+1}}{p^{(t+1)\alpha}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\zeta(t+1)+O(x^t p^{-t\alpha})\right\}=$$

$$x^{t+1}\zeta(t+1)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\left(\frac{1}{1-p^t}\right)\left(\frac{\alpha}{p^{(t+1)\alpha}}-\frac{\alpha p^t}{p^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{x^t}{1-p^t}\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\left(\frac{\alpha}{p^{t\alpha}}-p^t\right)\right)=$$

$$x^{t+1}\zeta(t+1)(p-1)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p^t}\right)^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{(p^{t+1}-1)^2}\right)+O(x^t\ln x)=$$

$$\frac{(p^{t+1}+p-2)\zeta(t+1)}{(p-1)(p^{t+1}-1)}x^{t+1}+O(x^t\ln x).$$

当 $t=1$ 时,

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n)\sigma_t(n) = \sum_{p^\alpha\leqslant x}\alpha\sigma_t(p^\alpha)\sum_{\substack{u\leqslant x/p^\alpha\\(u,p)=1}}\sigma_t(u) =$$

$$\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}\alpha\sigma_t(p^\alpha)\left\{\frac{x^{t+1}}{p^{(t+1)\alpha}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{t+1}}\right)\zeta(t+1)+O\left(x^t p^{-t\alpha}\ln\frac{x}{p^\alpha}\right)\right\}=$$

$$\frac{(p^2+p-2)\zeta(2)}{(p-1)(p^2-1)}x^2+O\left(\frac{x\ln x}{p-1}\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}(\alpha p-\frac{\alpha p}{p^\alpha})-\frac{x\ln p}{p-1}\sum_{\alpha\leqslant \ln x/\ln p}(\alpha^2 p-\frac{\alpha^2}{p^\alpha})\right)=$$

$$\frac{(p+2)\zeta(2)}{(p^2-1)}x^2+O(x\ln^3 x) = \frac{(p+2)\pi^2}{6(p^2-1)}x^2+O(x\ln^3 x).$$

即定理得证.

参考文献:

[1] F SMARANDACHE. Only problems not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] LV Chuan. A number theoretic function and its mean value: proceeding of Research on Smarandache Preoblems in Number Theory, Xi'an, February 11 - 14, 2004[C]. USA: Hexis, 2004: 33 - 35.

[3] LV Chuan. On the mean value of an arithmetical function: proceeding of Research on Smarandache Preoblems in Number Theory, Xi'an, February 11 - 14, 2004[C]. USA: Hexis, 2004: 89 - 92.

[4] 祁兰,赵院娥. 关于一个算术函数的混合均值[J]. 哈尔滨师范大学学报: 自然科学版, 2005, 21(5): 8 - 9.

[5] WANG Xiao-ying. On the mean value of an arithmetical function: proceeding of Research on Smarandache Preoblems in Number Theory, Xi'an, February 11 - 14, 2004[C]. USA: Hexis, 2004: 77 - 79.

[6] PAN Xiao-wei, ZHANG Pei. An identity involving the function $e_p(n)$ [J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 26 - 29.

[7] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

Hybrid Mean Value of the Smarandache Exponent Function $e_p(n)$ and the Function $\sigma_t(n)$

QV Zhi-lian

(Department of Basic Theory, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, China)

Abstract: In the report, the elementary methods were used to analysis the hybrid mean value of $e_p(n)$ and the function $\sigma_t(n)$, two asymptotic formulas of $\sum_{n\leqslant x} e_p(n)\sigma_t(n)$ were obtained.

Key words: Smarandache exponent function; mean value; asymptotic formula