2008年12月
第24卷 第4期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Dec. 2008
Vol.24 No.4

关于 Smarandache 素数列及其它的行列式

余亚辉 [1,2] ，蔡立翔 [1]

(1. 西北大学数学系, 陕西 西安 710127; 2. 洛阳理工学院, 河南 洛阳 471023)

摘 要：对任意正整数 $n \geq 2$, Smarandache 下素数列 $\{p_p(n)\}$ 定义为小于或等于 n 的最大素数; 而 Smarandache 上素数列 $\{P_p(n)\}$ 表示大于或等于 n 的最小素数. 本文的主要目的是利用初等方法研究 Smarandache 素数列的性质, 并得到由 Smarandache 素数列组成的行列式的一些性质.

关 键 词：Smarandache 下素数列; Smarandache 上素数列; 行列式

中图分类号：O156.4　**文献标识码**：A　**文章编号**：1008-5513(2008)04-0747-05

1 引言及结论

对任意正整数 $n \geq 2$, 著名的 Smarandache 下素数列 $\{p_p(n)\}$ 定义为小于或等于 n 的最大素数. 例如此数列的前几项是: $p_p(2)=2$, $p_p(3)=3$, $p_p(4)=3$, $p_p(5)=5$, $p_p(6)=5$, $p_p(7)=7$, $p_p(8)=7$, $p_p(9)=7$, $p_p(10)=7$, $p_p(11)=11$, $p_p(12)=11$, $p_p(13)=13$, $p_p(14)=13$, $p_p(15)=13$, $p_p(16)=13, \cdots$. 同理我们定义 Smarandache 上素数列 $\{P_p(n)\}$ 为大于或等于 n 的最小素数. 例如: $P_p(1)=2$, $P_p(2)=2$, $P_p(3)=3$, $P_p(4)=5$, $P_p(5)=5$, $P_p(6)=7$, $P_p(7)=7$, $P_p(8)=11$, $P_p(9)=11$, $P_p(10)=11$, $P_p(11)=11$, $P_p(12)=13$, $P_p(13)=13$, $P_p(14)=17$, $P_p(15)=17, \cdots$. 由这两个数列的定义可知对任意素数 q, 都有 $p_p(q)=P_p(q)=q$.

在文 [1-2] 中, Smarandache 教授建议我们研究这两个数列的性质. 关于这一内容及其有关问题, 不少学者进行了研究, 得出了一些有趣的结论, 参阅文 [3-6]. 例如在文 [6] 中闫晓霞研究了 $\dfrac{S_n}{I_n}$ 的渐近性质, 证明了对任意正整数 $n>1$, 有渐近公式

$$\frac{S_n}{I_n}=1+O(n^{-\frac{1}{3}})$$

其中 $I_n=\{p_p(2)+p_p(3)+\cdots+p_p(n)\}/n$ 及 $S_n=\{P_p(2)+P_p(3)+\cdots+P_p(n)\}/n$.

关于数列 $\{p_p(n)\}$ 与 $\{P_p(n)\}$ 的性质研究是很有意义的, 因为 Smarandache 素数列与素数分布问题有着密切的联系.

在本文中, 我们给出 Smarandache 素数列的一些重要性质. 首先定义由 Smarandache 素数列构成的行列式: 对任意正整数 n, 设 $c(n)$ 和 $C(n)$ 为 $n\times n$ 行列式, 即

$$c(n)=\begin{vmatrix} p_p(2) & p_p(3) & \cdots & p_p(n+1) \\ p_p(n+2) & p_p(n+3) & \cdots & p_p(2n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_p(n(n-1)+2) & p_p(n(n-1)+3) & \cdots & p_p(n^2+1) \end{vmatrix}$$

收稿日期：2008-01-09.

基金项目：国家自然科学基金 (10671155).

作者简介：余亚辉 (1982-), 在职研究生, 研究方向: 基础数学的教学与研究.

$$C(n)=\begin{vmatrix} P_p(1) & P_p(2) & \cdots & P_p(n) \\ P_p(n+1) & P_p(n+3) & \cdots & P_p(2n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_p(n(n-1)+1) & P_p(n(n-1)+2) & \cdots & P_p(n^2) \end{vmatrix}$$

例如

$$c(2)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1,\ c(3)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}=14,\ c(4)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 11 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 17 \end{vmatrix}=0$$

$$c(5)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 11 \\ 11 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 17 & 17 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 23 & 23 & 23 & 23 \end{vmatrix}=-96,\ c(6)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 11 & 11 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 17 & 17 & 19 \\ 19 & 19 & 19 & 23 & 23 & 23 \\ 23 & 23 & 23 & 29 & 29 & 31 \\ 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 37 \end{vmatrix}=0$$

··································

$$C(2)=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=4,\ C(3)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \\ 7 & 11 & 11 \end{vmatrix}=4,\ C(4)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 13 \\ 13 & 17 & 17 & 17 \end{vmatrix}=188$$

$$C(5)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 13 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 19 & 19 & 23 \\ 23 & 23 & 23 & 29 & 29 \end{vmatrix}=-1\ 424,\ C(6)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 7 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 \\ 13 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 \\ 19 & 23 & 23 & 23 & 23 & 29 \\ 29 & 29 & 29 & 29 & 29 & 31 \\ 31 & 37 & 37 & 37 & 37 & 37 \end{vmatrix}=0$$

$$C(7)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 7 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 13 & 17 \\ 17 & 17 & 17 & 19 & 19 & 23 & 23 \\ 23 & 23 & 29 & 29 & 29 & 29 & 29 \\ 29 & 31 & 31 & 37 & 37 & 37 & 37 \\ 37 & 37 & 41 & 41 & 41 & 41 & 43 \\ 43 & 47 & 47 & 47 & 47 & 51 & 51 \end{vmatrix}=37\ 536$$

$$C(8)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 7 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 13 & 13 & 17 & 17 & 17 \\ 17 & 19 & 19 & 23 & 23 & 23 & 23 & 29 \\ 29 & 29 & 29 & 29 & 29 & 31 & 31 & 37 \\ 37 & 37 & 37 & 37 & 37 & 41 & 41 & 41 \\ 41 & 43 & 43 & 47 & 47 & 47 & 47 & 51 \\ 51 & 51 & 51 & 53 & 53 & 57 & 57 & 57 \\ 57 & 59 & 59 & 61 & 61 & 67 & 67 & 67 \end{vmatrix}=0$$

····································

关于这些行列式的性质, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有在现有的文献中看到！最近, 张文鹏教授建议我们研究这些行列式的性质, 同时提出了下面两个猜测

猜测 1　对任意合数 $n \geq 6$, 有 $c(n)=0$ 及 $C(n)=0$.

猜测 2　对任意素数 q, 有 $c(q)\neq 0$ 及 $C(q)\neq 0$.

从前面几个例子我们也不难发现以上两个猜测是正确的, 从而坚定了我们研究这两个猜测的信心！本文的主要目的是利用初等方法研究这两个问题, 并彻底解决了猜测 1. 即就是证明了下面的

定理　对任意合数 $n \geq 6$, 我们有恒等式 $c(n)=0$ 及 $C(n)=0$.

显然我们的定理解决了猜测 1. 猜测 2 是否成立仍然是一个未解决的问题, 建议有兴趣的读者与我们一起探讨! 当然, 如果猜测 2 成立, 那么通过这种行列式的计算可以给出正整数是否为素数的一个新的判别方法!

2　定理的证明

这一节我们将对以上猜测进行分析, 并给出定理的证明.

(1) 首先证明 $c(n)=0$ 的情况, 以下讨论中的 n 为合数. 由 $c(n)$ 的定义我们可得

$$c(n)=\begin{vmatrix} p_p(2) & p_p(3) & \cdots & p_p(n-1) & p_p(n) & p_p(n+1) \\ p_p(n+2) & p_p(n+3) & \cdots & p_p(2n-1) & p_p(2n) & p_p(2n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_p(n(n-1)+2) & p_p(n(n-1)+3) & \cdots & p_p(n^2-1) & p_p(n^2) & p_p(n^2+1) \end{vmatrix}$$

因为 n 是合数, 显然 $i\cdot n$ 也是合数, 其中 $i=1,\ 2,\cdots n$. 由 Smarandache 下素数列 $\{p_p(n)\}$ 的定义, 显然有 $p_p(i\cdot n)=p_p(i\cdot n-1)$. 再观察行列式 $c(n)$, 可以看到行列式的第 $n-2$ 列与第 $n-1$ 列是相同的, 因此由行列式的性质得 $c(n)=0$.

(2) 现在证明定理的 $C(n)=0$, 下面证明过程中的 n 是大于 6 的任意合数. 这部分的证明过程类似上一部分的证明. 因为 n 是合数, 所以必然存在正整数 $b\geq a>1$ 使得 $n=a\cdot b$. 因此行列式 $C(n)$ 可以写为

$$C(n)=\begin{vmatrix} P_p(1) & \cdots & P_p(n-a) & P_p(n-a+1) & \cdots & P_p(n-1) & P_p(n) \\ P_p(n+1) & \cdots & P_p(2n-a) & P_p(2n-a+1) & \cdots & P_p(2n-1) & P_p(2n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_p(n(n-1)+1) & \cdots & P_p(n^2-a) & P_p(n^2-a+1) & \cdots & P_p(n^2-1) & P_p(n^2) \end{vmatrix}$$

因为 $n = a\cdot b \geq 6$ 及 $b \geq a > 1$, 所以

$$a|(i\cdot n-a) \text{ 且 } (i\cdot b-1) > 1$$

其中 $i=$ 1, 2,$\cdots$, n. 由此可知 $i\cdot n-a$ 是合数. 由 $C(n)$ 的定义我们可得

$$P_p(i\cdot n-a) = P_p(i\cdot n-a+1)$$

显然行列式 $C(n)$ 的第 $n-a$ 列和第 $n-a+1$ 列是相同的, 这就意味着 $C(n)=0$.

结合 (1) 和 (2) 就完成了定理的证明.

(3) 下面我们对 n 为素数时的情况进行讨论. 从引言中所列举的例子可以看到: 如果 n 是素数, 那么 $c(n)$ 与 $C(n)$ 都不等于零. 因此我们认为对任意的素数 q, 都有 $c(q)\neq 0$ 和 $C(q)\neq 0$, 也就是说猜测 2 可能是正确的. 关于这个结论, 我们暂时还不能证明, 但是通过大量的数据计算 (运用 MATLAB 数学软件), 我们相信猜测 2 是正确的! 下表是我们通过计算得出的一些数据.

表 1 n 为素数时的数据实验结果

n	$c(n)$	$C(n)$	n	$c(n)$	$C(n)$
2	1	4	3	14	4
5	-96	$-142\,4$	7	$1.021\,4\times 10^{5}$	$3\,753\,6$
11	$7.829\,9\times 10^{7}$	$1.147\,8\times 10^{8}$	13	$9.833\,8\times 10^{8}$	$-2.795\,8\times 10^{9}$
17	$8.246\,2\times 10^{14}$	$1.316\,4\times 10^{13}$	19	$-1.960\,8\times 10^{15}$	1.629×10^{15}
23	$2.454\,5\times 10^{20}$	3.156×10^{18}	29	$8.930\,8\times 10^{27}$	$-6.500\,8\times 10^{27}$
31	$1.109\,5\times 10^{29}$	$-2.283\,5\times 10^{28}$	37	$9.949\,7\times 10^{37}$	$-7.469\,2\times 10^{38}$
41	$-1.150\,2\times 10^{42}$	$3.924\,4\times 10^{45}$	43	$1.515\,2\times 10^{45}$	$-2.167\,1\times 10^{44}$
47	$1.160\,6\times 10^{51}$	4.06×10^{50}	53	$2.935\,9\times 10^{59}$	$5.873\,5\times 10^{59}$
59	$3.840\,2\times 10^{67}$	$-3.104\,3\times 10^{69}$	61	-3.614×10^{70}	$6.985\,8\times 10^{72}$
67	$3.234\,1\times 10^{80}$	$-9.537\,4\times 10^{78}$	71	-2.219×10^{85}	$4.768\,8\times 10^{86}$
73	$-3.665\,6\times 10^{85}$	$-3.698\,5\times 10^{89}$	79	$-4.203\,8\times 10^{98}$	$-3.876\,2\times 10^{97}$
83	$1.696\,6\times 10^{104}$	$2.138\,9\times 10^{104}$	89	$-1.069\,5\times 10^{113}$	$5.782\,4\times 10^{110}$
97	2.898×10^{124}	$1.996\,8\times 10^{124}$			

猜测 2 刻画了正整数 n 是否为素数的一个判定准则, 是我们进一步研究的目标.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problem, Not Solutions[M]. Chicago:Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Smarandache F. Sequences of Numbers Involved in Unsolved Problems[M]. Phoenix:Hexis, 2006.

[3] Heath-Brown D R. The differences between consecutive primes[J]. Journal of London Math. Soc., 1987,18(2):7-13.

[4] Heath-Brown D R. The differences between consecutive primes[J]. Journal of London Math. Soc., 1979, 19(2):207-220.

[5] 吴启斌. 一个包含 Smarandache 函数的复合函数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(4):463-466.

[6] Yan Xiaoxia. On the Smarandache prime part[J]. Scientia Magna, 2007, 3(3):74-77.

On the Smarandache prime part sequences and its determinant

YU Ya-hui[1,2] , CAI Li-xiang[1]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;

2. Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang, Henan 471023, China)

Abstract: For any positive integer $n \geq 2$, the Smarandache Inferior Prime Part $\{p_p(n)\}$ is the largest prime number less than or equal to n; The Smarandache Superior Prime Part $\{P_p(n)\}$ is the smallest prime number greater than or equal to n. The main purpose of this paper is using the elementary method to study the value of the determinant formed by the Smarandache prime part sequences, and give an interesting conclusion.

Keywords: Smarandache inferior prime part sequence, Smarandache superior prime part sequence, determinant

2000MSC: 11B83

(上接第 746 页)

[9] Halton J H. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals[J]. Number. Math., 1960,2:84-90.

[10] Faure H. Discrepance de suites associees a unsysteme de numeration (en dimension s) [J]. Acta Arith., 1982,41:337-351.

[11] Owen AB, Tribble SD. A quasi-Monte Carlo metropolis algorithm proceedings of the national academy of Sciences of the United States of America [J]. 2005,102:8844-8849.

[12] Pan Jianxin ,Robin Thompson. Quasi-Monte Carlo estimation in generalized linear mixed models.[C]//Biggeri A, Dreassi E, Lagazio C et al. In: Proceedings of the 19th International Workshop on Statistical Modelling. Florence: Firenze University Press, 2004.

Parameters estimation in binomial linear mixed model

HAN Jun-lin, GUO Min-zhi

(Department of Mathematics,Yunnan Normal University, Kunming 650092 ,China)

Abstract: In this paper, Quasi-Monte Carlo algorithm is used to estimate the parameters of binomial linear mixed model. First of all, the marginal likelihood is given. Then the QMC approach is used to approximate the integrated likelihood. Finally, Newton-Raphson algorithm is used to calculate the value of the parameters. The proposed approach is used to analyze the seed data, the performance show that this approach is available.

Keywords: binomial linear mixed model, Quasi-Monte Carlo integration, Newton-Raphson algorithm

2000MSC: 62H15