DOI :10.13338/j.issn.1006-8341.2008.01.019

第21卷第1期 纺织高校基础科学学报 Vol.21, No.1
2008年3月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES March, 2008

* 研究简报 *
文章编号: 1006-8341(2008)01-0128-03

关于 Smarandache 素数可加补数列

郭艳春[1,2], 路玉麟[1,3]

(1. 西北大学 数学系, 陕西 西安 710069; 2. 咸阳师范学院 数学系, 陕西 西安 712000;
3. 渭南师范学院 数学系, 陕西 西安 714000)

摘要: 研究著名的 Smarandache 素数可加补函数 SPAC(n) 的均值 $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a)$ 的敛散性. 利用初等及解析方法, 给出了均值 $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a)$ 一个较强的下界估计. 证明均值 $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a)$ 是发散的, 从而解决了由数论专家 Kenichiro Kashihara 提出的一个关于函数 SPAC(n) 的猜想.

关键词: F.Smarandache 素数可加补函数; 均值; 敛散性
中图分类号: O 156.4 文献标识码: A

1 引言及结论

$\forall n \in \mathbf{N}_+$, 著名的 Smarandache 素数可加补函数 SPAC(n) 定义为最小的非负整数 k 使得 $n+k$ 为素数. 例如 SPAC(1) = 1, SPAC(2) = 0, SPAC(3) = 0, SPAC(4) = 1, SPAC(5) = 0, SPAC(6) = 1, SPAC(7) = 0, SPAC(8) = 3, SPAC(9) = 2, …. 许多学者对 Smarandache 函数进行了研究, 并获得了不少重要的研究成果[1-2]. 文献[3] 美籍罗马尼亚著名数论专家, F.Smarandache 教授建议人们研究数列 $\{\mathrm{SPAC}(n)\}$ 的性质. 令

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a). \tag{1}$$

在文献[4] 中, Kenichiro Kashihara 建议人们研究极限

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a). \tag{2}$$

同时他猜测数列 $\{A_n\}$ 是发散的.

关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 甚至还不知道式(2) 的极限是否存在. 本文利用初等及解析方法研究数列 $\{A_n\}$ 的敛散性, 并解决了文献[4] 中提出的问题. 具体地 yi 也说是证明了下面的:

定理 1 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有估计式 $A_n = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a) \geqslant \frac{1}{2}\ln n + O(1)$.

显然由定理 1 立刻推出数列 $\{A_n\}$ 是发散的, 从而解决了文献[4] 中提出的猜测.

2 引 理

为了完成定理 1 的证明, 需要引入以下两个简单引理.

收稿日期: 2007-10-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)
通讯作者: 郭艳春(1976-), 女, 陕西省横山县人, 西北大学在读硕士, 咸阳师范学院讲师. E-mail: gyc1976.good@163.com

引理 1　设 $n\in\mathbf{N}_+$，则当 n 较大时在区间 $[n-n^{7/12}, n]$ 及 $[n, n+n^{7/12}]$ 中一定包含一个素数．即就是存在素数 p 及 q 使得 $n-n^{7/12}\leqslant p\leqslant n$ 及 $n<q\leqslant n+n^{7/12}$．

证明　参阅文献[5-6]．

引理 2　设 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数的个数，则有渐近公式 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$．

证明　参阅文献[7-8]．

3　定理 1 的证明

首先对任意充分大的正整数 n，设 $2=p_1<p_2<p_3<\cdots<p_m\leqslant n$ 表示区间 $[1, n]$ 中的所有素数．于是由 $\mathrm{SPAC}(a)$ 的定义可知在区间 $(p_i, p_{i+1}]$ 中所有整数 a 的素数可加补数之和为

$$\sum_{p_i<a\leqslant p_{i+1}}\mathrm{SPAC}(a)=p_{i+1}-p_i-1+p_{i+1}-p_i-2+\cdots+1+0=$$
$$(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)/2. \tag{3}$$

注意到 $\mathrm{SPAC}(a)=1$，所以由式(3)可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\leqslant n}\mathrm{SPAC}(a)&=1+\sum_{p_{i+1}\leqslant n}\sum_{p_i<a\leqslant p_{i+1}}\mathrm{SPAC}(a)+\sum_{p_m<a\leqslant n}\mathrm{SPAC}(a)\geqslant\\&\sum_{p_{i+1}\leqslant n}\frac{(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)}{2}=\\&\frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leqslant n}(p_{i+1}-p_i)^2-\frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leqslant n}(p_{i+1}-p_i)=\\&\frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leqslant n}(p_{i+1}-p_i)^2-\frac{1}{2}(p_m-2).\end{aligned} \tag{4}$$

应用柯西不等式有

$$\begin{aligned}p_m-2&=\sum_{p_{i+1}\leqslant n}(p_{i+1}-p_i)\leqslant\left[\sum_{p_{i+1}\leqslant n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{1/2}\left(\sum_{p_{i+1}\leqslant n}1\right)^{1/2}=\\&\left[\sum_{p_{i+1}\leqslant n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{1/2}(\pi(n))^{1/2}.\end{aligned}$$

从而可得不等式 $\sum_{p_{i+1}\leqslant n}(p_{i+1}-p_i)^2\geqslant\frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)}$．由此及式(4)并注意 A_n 的定义可得

$$nA_n\geqslant\frac{1}{2}\frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)}-\frac{1}{2}(p_m-2)=\frac{1}{2}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right]$$

或者

$$A_n\geqslant\frac{1}{2n}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right].$$

应用引理 1 及引理 2 并注意估计式 $n-p_m\ll n^{7/12}$ 立刻推出

$$A_n\geqslant\frac{[n+O(n^{7/12})]^2}{2n\left[\frac{n}{\ln n}+O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)\right]}+O\left(\frac{p_m}{n}\right)=\frac{n^2+O(n^{19/12})}{\frac{2n^2}{\ln n}+O\left(\frac{n^2}{\ln^2 n}\right)}+O(1)=\frac{1}{2}\ln n+O(1).$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln n+O(1)\right]=+\infty$，所以 $\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$．从而 A_n 是发散的．于是完成了定理 1 的证明．

参考文献：

[1] 苟素．关于 F. Smarandache 的第 64 个问题[J]．纺织高校基础科学学报，2003，16(3)：210-211．

[2] 吕忠田．关于 F. Smarandache 函数与除数函数的一个混合均值[J]．纺织高校基础科学学报，2007，20(3)：234-236．

[3] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[4] KENICHIRE Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. AZ: Erhus University Press, 1996.

[5] HEATH-Brown D R. The differences between consecutive primes[J]. Journal of Londom Mathematical Soc, 1978, 18(2): 7-13.

[6] HEATH-Brown D R. The differences between consecutive primes[J]. Journal of Londom Mthematical Soc, 1979, 19 (2): 207-220.

[7] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

On the sequence of Smarandache prime addictive complement

GUO Yan-chun[1,2], *LU Yu-lin*[1,3]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710069, China;
2. Department of Mathematics, Xianyang Teacher′s College, Xianyang, Shaanxi 712000, China;
3. Department of Mathematics, Weinan Teacher′s University, Weinan, Shaanxi 714000, China)

Abstract: The divergent property of the mean value $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a)$ of the famous Smarandache prime addictive complement function SPAC(n) was studied. Using the elementary and the analytic methods, a sharper lower bound estimate for the mean value $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a)$ was given. It is proved that the mean value $\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a)$ is divergent. This solved a conjecture proposed by Kenichiro Kashihara.

Key words: F. Smarandache prime addictive complement function; mean value; divergence

编辑、校对: 黄燕萍

(上接第127页)

[2] LARS Stentoft. Convergence of the least squares monte-carlo approach to american option valuation[R]. North Carolina: North Carolina State University, 2003: 1-15.

[3] 郑承利, 韩立岩. 基于偏最小二乘回归的美式期权定价方法[J]. 应用概率统计, 2004, 20(3): 295-300.

[4] MARIO Cerrato, Kan Kwok Cheung. Valuing american style options by least squares methods[R]. London: London Metropolitan University, 2006: 1-18.

[5] WU Rongwen. Applications of Monte Carlo Simulation in Derivative Securities Pricing[D]. Maryland: University of Maryland, 2002: 18-59.

[6] 王惠文. 偏最小二乘回归方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.

Application of partial least-squares regression in valuing American-Asian option

WANG Xu, *WANG La-sheng*

(School of Science, Xi′an Polytechnic University, Xi′an 710048, China)

Abstract: An American-Asian is valued option based on the partial least-squares regression. In the interim, the price samples of underlying asset in the option are obtained by using Monte Carlo simulation, whose price process obeys Geometric Brownian Motion. Compared with the stochastic approximation method based on the perturbation analysis estimators and the simple least-squares approach, this method has better stability and higher convergence speed, besides on the premise of ensuring accuracy.

Key words: Monte Carlo simulation; partial least-squares regression; American-Asian option

编辑: 黄燕萍; 校对: 强 薇、黄燕萍