第 41 卷 第 3 期 内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版） Vol. 41 No. 3
2012 年 5 月 Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition) May 2012

关于 Smarandache 结构数列

刘宝利

（西安航空职业技术学院 基础课部，陕西 阎良 710089）

摘 要：Smarandache 结构数列 $\{a_n\}$ 定义为 $\{1, 23, 456, 7891, 23456, 789123, 4567891, 23456789, 123456789, \cdots\}$. 利用初等对接方法及数列 $\{a_n\}$ 特有的分布性质，研究了该数列的算术性质，给出其数字和函数的一个较强的渐近公式.

关键词：Smarandache 结构数列；数字和函数；均值；渐近公式

中图分类号：O 156.4 **文献标志码**：A **文章编号**：1001—8735(2012)03—0241—03

1 主要结果

著名数论专家 F. Smarandache 在他所著的 *Only problems, not solutions* 一书中提出了 105 个未解决的问题或猜测[1]，其中第 18 个问题就是引入结构数列 $\{a_n\} = \{1,23,456,7891,23456,789123,4567891,23456789,\cdots\cdots\}$，即 a_n 按自然数 $1,2,3,\cdots,8,9$ 的次序重复排列，每个数 a_{n+1} 比它的前一项 a_n 多一位且按照紧接 a_n 的末位数字继续排下去的方法构成. 例如，$a_{10} = 1234567891$，$a_{11} = 23456789123$，$\cdots$. F. Smarandache[2] 还建议人们研究该数列的各种算术性质. 关于这一问题，一些学者进行过探讨，例如 J. Earls[3] 寻找了该数列中包含的素数个数，在区间 $1 \leqslant n \leqslant 500$ 内发现了 13 个素数，即 $a_2, a_7, a_8, a_{10}, a_{17}, a_{20}, a_{25}, a_{28}, a_{31}, a_{38}, a_{61}, a_{62}, a_{335}$. 那么，是否存在无穷多个自然数 n 使得 a_n 为素数呢？这是一个很难解决的数论问题，有兴趣的读者可以去考虑. 关于数列 $\{a_n\}$ 的其他算术性质，我们知道的并不多，至少在现有的文献中还没有见到. 本文研究数列 $\{a_n\}$ 的算术性质，利用初等对接方法以及 $\{a_n\}$ 特有的分布性质，讨论该数列数字和函数的均值分布问题，给出了一个较强的渐近公式. 为方便起见，设 $S(n)$ 表示 n 的十进制中各位数字之和，如 $S(10)=1+0=1$，$S(321)=1+2+3=6$，$S(a_2)=S(23)=5$，$S(a_3)=S(456)=15$，$S(a_4)=S(7891)=25$. 在此定义下，有下面的结论.

定理 1 设 $\{a_n\}$ 表示 Smarandache 结构数列，则对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{a_n \leqslant x} S(a_n) = \frac{5}{2} \cdot \left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right]^2 + \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right] + O(1),$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

定理 2 设 $\{a_n\}$ 表示 Smarandache 结构数列，则对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} S(a_n) = \frac{5}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x + O(1).$$

显然，我们的结论还可以一般化. 设 $S_k(n)$ 表示 n 的十进制中各位数字的 k 次幂之和，例如 $S_3(123) = 1^3+2^3+3^3=36$，$S_4(12)=1^4+2^4=17$. 则有下面的结论.

定理 3 设 $\{a_n\}$ 表示 Smarandache 结构数列，k 为任意给定的正整数，则对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{a_n \leqslant x} S_k(a_n) = \frac{c(k)}{18} \cdot \left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right]^2 + \frac{c(k)}{6} \cdot \left[\frac{\ln x}{\ln 10}\right]^2 + O(1),$$

其中 $c(k) = 1^k+2^k+3^k+4^k+5^k+6^k+7^k+8^k+9^k$，为常数.

收稿日期：2011-12-22

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071194)；2011 陕西省教育厅科学研究计划(11JK0487)

作者简介：刘宝利(1979—)，女，陕西宝鸡人，西安航空职业技术学院讲师，硕士，主要从事解析数论研究.

定理 4 设$\{a_n\}$表示Smarandache结构数列，k为任意给定的正整数，则对任意整数$x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(a_n)=\frac{c(k)}{18}\cdot x^2+\frac{c(k)}{6}\cdot x+O(1),$$

其中$c(k)=\sum_{1}^{9} i^k$，为常数，特别当$k=2,3$时，有

$$\sum_{n\leqslant x} S_2(a_n)=\frac{95}{6}\cdot(x^2+x)+O(1),\quad \sum_{n\leqslant x} S_3(a_n)=\frac{225}{2}\cdot(x^2+x)+O(1).$$

2 定理的证明

本节利用初等对接方法及数列a_n数字和函数的特点来完成定理的证明，所用到的初等数论知识参见文献[4-7]，有关 Smarandache 问题的其他内容参见文献[8-11].

定理 1 的证明 对任意实数$x>1$，显然存在正整数m，使得满足不等式$a_m\leqslant x<a_{m+1}$. 所以x的整数部分的位数一定为m位，因此$10^{m-1}\leqslant x<10^m$，取对数得$(m-1)\ln 10<\ln x<m\ln 10$. 由取整函数的性质可知

$$m=\left[\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x\right]+1, \tag{1}$$

由m的定义可知，不大于x的最大a_n即a_m的位数是m位. 不妨这样考虑问题：将所有$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$按照自然顺序对接起来得到一个自然数M，显然，M的位数为

$$1+2+3+\cdots+m-1+m=\frac{m(m+1)}{2},$$

而M的各位数字是由$\{1,2,3,\cdots,8,9\}$重复排列，由带余除法可知存在非负整数q及r使得$\frac{m(m+1)}{2}=9q+r$，其中$q=\left[\frac{m(m+1)}{18}\right]$，$0\leqslant r<9$，则由$M$的定义可得

$$M=\overbrace{\underbrace{123456789}\underbrace{123456789}\cdots\underbrace{123456789}}^{q}123\cdots r,$$

即M的表示式中数字 123456789 重复出现了$q=\left[\frac{m(m+1)}{18}\right]=\frac{m(m+1)}{18}+O(1)$次. 在一个循环段 123456789 上，它的数字之和为$1+2+\cdots+9=45$. 显然，由M的结构及数字和函数的定义有

$$\sum_{a_n\leqslant x} S(a_n)=\sum_{k=1}^{m} S(a_k)=S(M)=q\times 45+1+2+3+\cdots+r=$$
$$45\times\left[\frac{m(m+1)}{2\times 9}\right]+O(1)=\frac{5}{2}\cdot m(m+1)+O(1). \tag{2}$$

结合(1)和(2)式可得渐近公式

$$\sum_{a_n\leqslant x} S(a_n)=\frac{5}{2}\cdot\left(\left[\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x\right]+1\right)\cdot\left(\left[\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x\right]+2\right)+O(1)=$$
$$\frac{15}{2}\cdot\left[\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x\right]^2+\frac{15}{2}\cdot\left[\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln x\right]+O(1).$$

于是证明了定理 1.

定理 2 的证明 由于x为整数，所以a_x的位数为x位. 将所有$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_x$按照自然顺序对接起来得到一个自然数N，显然，N的位数为

$$1+2+3+\cdots+x-1+x=\frac{x(x+1)}{2}.$$

所以，利用定理 1 的证明方法有

$$\sum_{n\leqslant x} S(a_n)=S(N)=\left[\frac{x(x+1)}{2\times 9}\right]\times 45+O(1)=\frac{5}{2}\cdot x^2+\frac{5}{2}\cdot x+O(1).$$

于是完成了定理 2 的证明.

定理 3 和定理 4 的证明方法与定理 1 相同，差别在于对 123456789 一段上数字和的计算. 在定理 3 中，123456789 的数字之和应为 $c(k)=\sum_{i=1}^{9} i^k$. 在定理 1 及定理 2 中 $k=1$ 是一个特殊情况，即 $c(1)=45$.

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M], Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 20.

[2] Smarandache F. Sequences of numbers involved in unsolved problems [M]. Phoenix, Hexis, 2006: 4.

[3] Earls J. Some results concerning the Smarandache deconstructive sequence [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 222-226.

[4] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[5] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[6] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.

[7] Shapiro H N. Introduction to the theory of numbers [M]. John Wiley and Sons, 1983.

[8] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. Erhus University Press, 1996.

[9] Dumitrescu C, Seleacu V. The Smarandache Function [M]. Erhus University Press, 1996.

[10] 郭晓燕，袁霞. 关于 Smarandache 问题研究的新进展 [M]. High American Press, 2010.

[11] 刘燕妮，李玲，刘宝利. Smarandache 未解决的问题及其新进展 [M]. High American Press, 2008.

On the F. Smarandache Deconstructive Sequence

LIU Bao-li

(*Department of Basic Course, Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute, Yanliang* 710089, *Shaanxi, China*)

Abstract: F. Smarandache deconstructive sequence is defined as $\{a_n\}=\{1,23,456,7891,\cdots\}$. The main purpose of this paper is using the elementary joint method and the distribution the properties of the F. Smarandache deconstructive sequence to study the mean value problem of the digits sum function $S(a_n)$ of a_n, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: Smarandache deconstructive sequence; digits sum function; mean value; asymptotic formula

【责任编辑 陈汉忠】