关于 Smarandache 自相关序列*

乐 茂 华

(湛江师范学院数学系, 广东 湛江 524048;
梧州师范高等专科学校数学系, 广西 贺州 542800)

摘要: 对于任何正整数 n, 给出了 n 重 Smarandache 自相关序列的明显公式.

关键词: 自相关序列; 普通生成函数; 明显公式

中图分类号: O 156 文献标识码: A 文章编号: 1004-2911(2004)03-0225-02

设 N 是全体正整数的集合, 对于序列 $A=\{a(m)\}_{m=1}^{\infty}$, 如果序列 $B=\{b(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 满足

$$b(m)=\sum_{k=1}^{\infty} a(k)\circ a(m-k+1) \quad m\geq 1 \tag{1}$$

则称 B 是 A 的 Smarandache 自相关序列, 记作 $SACS(A)$[1]. 对于正整数 n, $SACS(n, A)$ 是 A 的 n 重 Smarandache 自相关序列, 它的定义是

$$SACS(n, A)=SACS(SACS(n-1, A))=SACS(SACS(\cdots SACS(1, A)\cdots)) \tag{2}$$

其中 $SACS(1, A)=SACS(A)$. 最近, Murthy[2] 提出了以下猜想:

猜想 当 $a(m)=m(m\geqslant 1)$ 时, 对于任何正整数 n, 如果 $SACS(n, A)=B=\{b(m)\}_{m=1}^{\infty}$, 则必有

$$b(m)=\binom{2^{n+1}+m-1}{2^{n+1}-1} \quad m\geq 1 \tag{3}$$

本文证实了上述猜想是正确的, 即证明了:

定理 当 $a(m)=m(m\geqslant 1)$ 时, 对于正整数 n, 如果 $SACS(n, A)=B=\{b(m)\}_{m=1}^{\infty}$, 则 $b(m)$ 满足(3)

证明 对于给定的序列 $A=\{a(m)\}_{m=1}^{\infty}$, 设普通生成函数

$$f(A; x)=a(1)+a(2)x+a(3)x^2+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty} a(m)x^{m-1} \tag{4}$$

又设 $B=\{b(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 是 A 的 Smarandache 自相关序列,

$$g(A; x)=b(1)+b(2)x+b(3)x^2+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty} b(m)x^{m-1} \tag{5}$$

根据普通生成函数的乘法规则[3], 从自相关序列的定义(1), 结合(4)和(5)可得

$$g(A; x)=(f(A; x))^2 \tag{6}$$

类似地, 当 $SACS(n, A)=B=\{b(m)\}_{m=1}^{\infty}$ 时, 从(1), (2)和(6)可知: 如果

$$g(n, A; x)=b(1)+b(2)x+b(3)x^2+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty} b(m)x^{m-1} \tag{7}$$

* 收稿日期: 2004-02-15
作者简介: 乐茂华(1952-), 男, 教授, 上海市人, 主要从事数论研究.
* 基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 10271104), 广东省自然科学基金项目(No. 011781), 广东省教育厅自然科学研究项目(No. 0161), 湛江市988科技兴湛计划项目.

则必有

$$g(n, A; x) = (f(A; x))^{2^n} \quad n \in N \tag{8}$$

当 $a(m) = m(m \geqslant 1)$ 时, 从(4) 可知

$$f(A; x) = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = (1 - x)^{-2} \tag{9}$$

将(9) 代入(8) 立得

$$g(n, A; x) = (1 - x)^{-2^{n+1}} \quad n \in N \tag{10}$$

于是, 根据二项式定理, 从(7) 和(10) 可得(3). 定理证完.

参考文献:

[1] Ibstedt H. The Smarandache sequence inventory[J]. Smarandache Notions J, 1999(10): 183—190.

[2] Murthy A. Smarandache reverse auto correlated sequences and some Fibonacci derived Smarandache sequences[J]. Smarandache Notions J, 2001(12): 279—282.

[2] Niven1. Formal power series[J]. Amer Math Monthly, 1969, 76: 871—889.

On the Smarandache auto correlated sequences

LE Mao—hua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang Guangdong 524048, China;
Department of Mathematics, Wuzhou Teachers College, Hezhou Guangxi 542800, China)

Abstract: This paper gives an explicit formula for the n times Smarandache auto correlated sequence.

Key words: auto correlated sequence; generating function; explicit formula