2006年 9月
第 22卷第 3期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Sep. 2006
Vol. 22 No. 3

关于 Smarandache问题中逆序排列的偶数数列的性质[20]

杨倩丽,李　赟

(渭南师范学院数学系,陕西 渭南　714000)

摘　要: 主要研究了 Smarandache问题中逆序排列的偶数数列的算术性质,采用递推,归纳,猜想的办法,得出了 Smarandache问题中逆序排列的偶数数列的递推公式、通项的精确表达式以及几个相关的性质.引理和定理的证明主要用了递推和数学归纳法.解决了文 [1]中的部分问题,对于 Smarandache问题中的数列有推动作用.

关　键　词: Smarandache7问题中逆序排列的偶数数列;算术性质;递推公式

中图分类号: O156.4　文献标识码: A　文章编号: 1008-5513(2006)03-0325-05

1　引言及主要结论

著名的 Smarandache问题中逆序排列的偶数数列 $\{b_n\}$ 被定义为如下: 2, 42, 642, 8642, 108642, 12108642, 1412108642, 161412108642, 1816141208642,⋯ .文 [1]提出这个问题,希望我们去研究这个数列的算术性质.这个问题很值得我们去研究,但是很可惜至今仍没有人去研究. 至少我们还没有看到这类论文.在这篇论文中,我们将用基本的方法去研究 Smarandache逆序排列的偶数数列的算术性质,并且给出了它的递推公式、通项的精确表达式以及几个相关的性质等等.

定理 1　假设当 $n\geqslant 2$时,任意的正整数 $(2n-2)$ 有 k位数.那么对于 Smarandache逆序排列的偶数数列 $\{b_n\}$,我们有如下的递推公式

$$b_n = b_{n-1} + 2n\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+kn-1}$$

这里 $b_1 = 2$.

定理 2　若 $(2n-2)$有 k位数.那么 Smarandache逆序排列的偶数数列 $\{b_n\}$中的第 b_{n-1}项有 $\frac{10-10^k}{18}+kn-1$位数.

[20]收稿日期: 2005-01-09.

基金项目:国家自然科学基金资助项目 (10271093)和陕西省教育厅基金项目 (05JK189).

作者简介:杨倩丽 (1964-),女,副教授,研究方向:数论.

定理 3 假设 $S_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}2i\times 10^{kn-1}$,那么将得到通项的精确表达式,即

$$b_n=2+S_{1(2,5)}+10^{-5}\times S_{2(6,50)}+10^{-55}\times S_{3(51,500)}+\cdots+10^{-(k-1)5\cdots5}\times S_{k(m,n)}$$

定理 4 若 S_{50} 表示 Smarandache逆序排列的偶数数列 $\{b_n\}$的前 50项之和,那么

$$S_{50}=\frac{99\times 46^2\times 10^5-50}{9}+\frac{-85\times 10^5-101\times 10^9+1980}{9^2}+\frac{-4\times 10^5+4\times 100}{9^3}+\frac{99\times 10^{96}-11\times 45\times 10^6}{99}+\frac{95\times 10^{96}+77\times 10^8}{99^2}+\frac{-4\times 10^{96}+4\times 10^{10}}{99^3}$$

2 引 理

引理 1 设 k、m、n为正整数,并且 $m\leqslant n$,则

$$S_{k(m,n)}=\frac{2m\times 10^{km-1}}{1-10^k}+2\times\frac{10^{k(m+1)}[1-10^{k(n-m)}]}{(1-10^k)^2}-\frac{2n\times 10^{k(n+1)}}{1-10^k}$$

证明 由 $S_{k(m,n)}$的定义,可知

$$S_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}2i\times 10^{ki-1}=2m\times 10^{km-1}+2(m+1)\times 10^{k(m+1)-1}+\cdots+2n\times 10^{kn-1}$$

从而 $$10^kS_{k(m,n)}=2m\times 10^{k(m+1)-1}+2(m+1)\times 10^{k(m+2)-1}+\cdots+2(n-1)\times 10^{kn-1}+2n\times 10^{k(n+1)-1}$$

因此可得

$$(1-10^K)S_{k(m,n)}=2m\times 10^{km-1}+2\times[10^{k(m+1)-1}+10^{k(m+2)-1}+\cdots+10^{kn-1}]-2n\times 10^{k(n+1)-1}$$

所以

$$S_{k(m,n)}=\frac{2m\times 10^{km-1}}{1-10^k}+2\times\frac{10^{k(m+1)-1}[1-10^{k(n-m)}]}{(1-10^k)^2}-\frac{2n\times 10^{k(n+1)-1}}{1-10^k}$$

这就证明了引理 1.

引理 2[2] 假设 $S'_{k(m,n)}=\sum_{i=m}^{n}i^2\times 10^{-ki}$.那么对于任意的正整数 k、m、n,有

$$S_{k(m,n)}=\frac{m^2\times 10^{-km}}{1-10^{-k}}+\frac{(2m+1)\times 10^{-k(m+1)}}{(1-10^{-k})^2}2\times\frac{10^{-k(m+2)}[1-10^{-k(n-m-1)}]}{(1-10^{-k})^3}-\frac{(2n-1)\times 10^{-k(n+1)}}{(1-10^{-k})^2}-\frac{n^2\times 10^{-k(n+1)}}{1-10^{-k}}$$

引理 3[2] 假设 $S''_{k(m,n)}=\sum_{T=m}^{n}i\times 10^{-ki}$,那么对于任意的正整数 k、m、n,有

$$S''_{k(m,n)}=\frac{m\times 10^{-km}}{1-10^{-k}}+\frac{10^{-k(m+1)}[1-10^{-k(n-m)}]}{(1-10^{-k})^2}-\frac{n\times 10^{-k(n+1)}}{1-10^{-k}}$$

3　定理的证明

在这一部分,我们将用以上的引理去完成定理的证明.首先我们用数学归纳法来证明定理 1.

证明　(1)　当 $n = 2, 3$时,定理 1显然成立.

(2)　假设当 $n = m$时,定理 1成立,即 $b_m = b_{m-1} + 2n\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+km-1}$.

比较 b_m 与 b_{m-1}可知,b_{m-1}有$\frac{10-10^k}{18}+km-1$位数.

如果 $n = m+1$,我们可分为两种情况来讨论:

(i)　如果 $2m$仍有 k位数,那么 b_m就有 $[\frac{10-10^k}{18}+km-1+k]$位数,比较 b_{m+1}与 b_m,立即可得$\frac{b_{m+1}-b_m}{2(m+1)} = 10^{\frac{10-10^k}{18}+km-1+k}$

即
$$b_{m+1} = b_m + 2(m+1)\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+k(m+1)-1)}$$

(ii)　如果 $2m$有 $k+1$位数,那么就有 $[\frac{10-10^k}{18}+km-1+k+1]$位数.考虑到 $(2m-2)$有 k位数,$2m$有 $k+1$位数,因此仅存在一种情况,那就是
$$2m-2 = 10^k-2, 2m = 10^k$$

即 $m = \frac{10^k}{2}$.因此,有
$$\frac{10-10^k}{18}+km-1+(k+1) = \frac{10-10^k}{18}+k\times\frac{10^k}{2}-1+(k+1)$$
$$= \frac{10-10^{k+1}}{18}+(k+1)(m+1)-1$$

比较 b_{m+1}与 b_m的不同,可推断
$$\frac{b_{m+1}-b_m}{2(m+1)} = 10^{\frac{10-10^k}{18}+(km-1)+(k+1)} = 10^{\frac{10-10^{k+1}}{18}+(k+1)(m+1)-1)}$$

即
$$b_{m+1} = b_m + 2(m+1)\times 10^{\frac{10-10^{k+1}}{18}+(k+1)(m+1)-1}$$

结合(i),(ii)可知,对于任意的正整数 n,定理 1恒成立.

这就证明了定理 1.

利用定理 1的结论,并且满意到 b_n 与 b_{n-1}的不同,我们立即可得定理 2.

由定理 1可知,$2n-2$有 k位数,我们假设 $2m-2$是最小的一个有 k位数的正整数(当 $k = 1$时,$m = 2$;并且 $m = \frac{10^{k-1}}{2}+1$),那么

$$b_n = 2+2\times 2\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 2-1}+2\times 3\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 3-1}+$$

$$2\times 4\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 4-1}+2\times 5\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 5-1}+2\times 6\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 6-1}+\cdots+$$
$$2\times 50\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-1}+2\times 51\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 51-1}+\cdots+$$
$$2\times m\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+2\times m-1}+\cdots+2\times n\times 10^{\frac{10-10^k}{18}+2\times n-1}$$
$$=2+10^{\frac{10-10^1}{18}}\times S_{1(2,5)}+10^{\frac{10-10^2}{18}}\times S_{2(6,50)}+10^{\frac{10-10^3}{18}}\times$$
$$S_{3(51,500)}+\cdots+10^{\frac{10-10^k}{18}}\times S_{k(m,n)}$$
$$=2+S_{1(2,5)}+10^{-5}\times S_{2(6,50)}+10^{-55}\times S_{3(51,500)}+\cdots+10^{-\overbrace{5\cdots5}^{(k-1)}}\times S_{k(m,n)}$$

根据定理 1的结论,我们即可推出定理 3.

现在我们来证明定理 4.根据定理 1,有

$$S_{50}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{49}+b_{50}$$
$$=50\times 2+49\times(2\times 2)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 2-1}+$$
$$48\times(2\times 3)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 3-1}+47\times(2\times 4)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 4-1}+$$
$$46\times(2\times 5)\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 5-1}+45\times(2\times 6)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 6-1}+$$
$$44\times(2\times 7)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 7-1}+\cdots+3\times(2\times 48)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 48-1}+$$
$$2\times(2\times 49)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 49-1}+1\times(2\times 50)\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-1}$$
$$=101\times\sum_{i=46}^{50} i\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times(i-1)-1}+101\times\sum_{i=1}^{45} i\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times(i-1)-1}-$$
$$2\times\sum_{i=46}^{50} i^2\times 10^{\frac{10-10^1}{18}+1\times 50-1\times(i-1)-1}-2\times\sum_{i=1}^{45} i\times 10^{\frac{10-10^2}{18}+2\times 50-2\times(i-1)-1}$$
$$=101\times 10^{50}\times\sum_{i=46}^{50} i\times 10^{-i}+101\times 10^{96}\times\sum_{i=1}^{45} i\times 10^{-2i}-$$
$$2\times 10^{50}\times\sum_{i=46}^{50} i^2\times 10^{-i}-2\times 10^{96}\times\sum_{i=1}^{45} i^2\times 10^{-2i}$$

根据引理 2与引理 3的结论,我们可得到

$$S_{50}=\frac{99\times 46^2\times 10^5-50}{9}+\frac{-85-101\times 10^9+1980}{9^2}+\frac{-4\times 10^5+4\times 100}{9^3}+$$
$$\frac{99\times 10^{96}-11\times 45\times 10^6}{99}+\frac{95\times 10^{96}+77\times 10^8}{99^2}+\frac{-4\times 10^{96}+4\times 10^{10}}{99^3}$$

这就证明了定理 4.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Pub1. House, 1993.

[2] Liu Junzhuang, Wang Nianliang. On the Smarandache Back Concatenated Odd Sequences[J]. Research on Smarandache problems in number theory, 2005(2): 63-70.

On the sequences of Smarandache problem

YANG Qian-li LI Yun
(Department of Mathematics, Weinan Teacher′s College, Weinan 714000, China)

Abstract The main purpose of this paper is to study the arithmetical properties of the Smarandache back concatenated even sequences. The methods of recursion, induction, guessed were used, obtain Smarandache in the issue against even number recurrence formula, coherent accurate expression formula and several relevant property of item of line that preface arrange. The proof of lemma and theorem are mainly by recursion. This paper solves some problems of [1], show the impetus for the number in Smarandache question, and have offered the important method for studying some sequences too.

Key words the Smarandache back concatenated even sequences, arithmetical properties, recursion formula
2000 MSC 11M06

(上接第 **324**页)

The feasible Mosaic pattern of two-dimensional cellular neural networks with five feedback weight values

LU Sheng-jie
(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract In this paper, we investigate a kind of cellular neural networks of two-dimensional with five feedback weight values. Useing the system′s output feedback Weight Values and thresholds as parameters to construct a parameter space, and dependenting method of geometry decompose the space into finite region. At last, we give the necessary and sufficient condition of all of possible output functions′Mosaic pattern which belong to system′s Mosaic solution, when the output feedback weight values and thresholds in one region.

Key words cellular neural network, parameter space, Mosaic solution, feasible Mosaic pattern
2000 MSC 92B20, 82C32