DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2010.01.007
西北大学学报(自然科学版)
2010年2月,第40卷第1期,Feb., 2010, Vol.40, No.1
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

关于Smarandache问题的一个推广

郭晓艳

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要:目的 对F. Smarandache提出的一个问题进行研究。方法 采用初等方法。结果 求解含有 $n-1$ 个变量的方程,$x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} + \cdots + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = na$。结论 推广了F. Smarandache所提出的一个问题。

关 键 词:Smarandache方程;均值不等式;函数极值;实数解
中图分类号:O212 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2010)01-0009-03

A generalization of the Smarandache problem

GUO Xiao-yan

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: Aim To study one of the problems that romanian number theorist professor F. Smarandache has proposed and to generalize. Methods Utilizing the elementary methods. Results Having solved the equation of containing $n-1$ variables completely, $x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} + \cdots + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = na$. Conclusion One of the problems proposed by professor F. Smarandache has been developed.

Key words: Smarandache equation; mean value inequality; extremal value of function; real solutions

1 引言及结论

不定方程(或方程组)是变量数个数多于方程个数,且变量取整数值的方程(或方程组)。不定方程是数论中古老而又重要的一个分支,例如著名的Fermat大定理就是不定方程的一个典型代表。其内容与现代数学有密切的联系。美籍罗马尼亚著名数论专家F. Smarandache教授在他所著的“只有问题,没有解答”一书的第50个问题中建议我们研究方程[1]

$$x a^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} a^{x} = 2a \tag{1}$$

的可解性,并求该方程的所有实数解。

关于这一问题,张文鹏教授在文献[2]中进行了研究。具体地说,即证明下面的结论:

对所有的 $a \in R \setminus \{-1, 0, 1\}$,方程(1)有且仅有一个实数解 $x = 1$。

本文将方程(1)进行了推广和延伸,即考虑了 $n-1$ 个变量的情况,求出了方程

$$x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \cdots + x_{n-1} a^{\frac{1}{x_{n-1}}} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} a^{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = na \tag{2}$$

的所有非负实数解,亦即证明了下面的定理。

定 理 对任意实数 $a \in R \setminus \{0\}$,方程(2)有且仅有一组非负实数解

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_{n-1} = 1。$$

当 $n = 2$ 时,方程(2)变为 $x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{x_1} a^{x_1} = 2a$,即文献[2]中所讨论的情况,因此本文的结果是文

收稿日期:2009-04-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省教育厅基金资助项目(09JK749)
作者简介:郭晓艳,女,陕西大荔人,西北大学博士生,从事数论及其应用研究。

献[2]中定理的推广和延伸。

2 定理的证明

利用文献[2]中的思想直接给出定理证明。为此需要下面的两个结论。

结论1 对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}。$$

多元函数取得极值的必要条件:设函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在点$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$具有偏导数且取得极值,则它在该点的偏导数必为零,即

结论2 $f_1(x_1',x_2',\cdots,x_n')=f_2(x_1',x_2',\cdots,x_n')=\cdots=f_n(x_1',x_2',\cdots,x_n')=0$。

以上两个结论的证明可参阅文献[3-4]及[6]。

现在利用以上两个结论来证明对所有 $a\in R\setminus\{0\}$,方程

$$x_1a^{\frac{1}{x_1}}+x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\cdots+x_{n-1}a^{\frac{1}{x_{n-1}}}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}=na$$

成立,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$。现在将 a分成三种情况 $a\geqslant 1$, $0<a<1$及 $a<0$讨论。

事实上当 $a\geqslant 1$时,由上面的基本不等式可得

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+x_1x_2\cdots x_{n-1}\geqslant n,$$

于是有

$$x_1a^{\frac{1}{x_1}}+x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\cdots+x_{n-1}a^{\frac{1}{x_{n-1}}}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\geqslant$$
$$n\sqrt[n]{a^{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+x_1x_2\cdots x_{n-1}}}\geqslant n\sqrt[n]{a^n}\geqslant na,$$

上式成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$或者 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$。即当 $a\geqslant 1$时,方程(2)仅有一组正实数解 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$。

当 $0<a<1$时,为方便起见,设 $x_n=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$,并令函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=x_1a^{\frac{1}{x_1}}+x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\cdots+x_{n-1}a^{\frac{1}{x_{n-1}}}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}-na,$$

因为函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$在$(0,+\infty)$上是可导的,故对 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$分别关于 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$求偏导数,可得

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=a^{\frac{1}{x_1}}(1-\frac{\ln a}{x_1})+\frac{1}{x_1}\ln a\,a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}-\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}=$$
$$a^{\frac{1}{x_1}}(1-\frac{\ln a}{x_1})+\frac{1}{x_1}a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a-x_n),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=a^{\frac{1}{x_2}}(1-\frac{\ln a}{x_2})+\frac{1}{x_2}a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a-x_n),$$

……

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}=a^{\frac{1}{x_{n-1}}}(1-\frac{\ln a}{x_{n-1}})+\frac{1}{x_{n-1}}a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a-x_n)。$$

分别令$\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}=0$,则

$$a^{\frac{1}{x_1}}(\ln a-x_1)=a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a-x_n),$$
$$a^{\frac{1}{x_2}}(\ln a-x_2)=a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a-x_n),$$

……

$$a^{\frac{1}{x_{n-1}}}(\ln a-x_{n-1})=a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a-x_n)。$$

设函数 $u(x)=a^{\frac{1}{x}}(\ln a-x)$,其中 $0<a<1$。下面证明此函数为单调函数。

$$u'(x)=a^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x^2}\ln a(x-\ln a)-1]=$$
$$-a^{\frac{1}{x}}[(\frac{\ln a}{x})^2-\frac{\ln a}{x}+1]=$$
$$-a^{\frac{1}{x}}[(\frac{\ln a}{x}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]<0。$$

故 $u(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递减函数,所以对应于同一个函数值 $u(x_0)$,有且仅有一个 x_0成立。所以由

$$a^{\frac{1}{x_1}}(\ln a-x_1)=$$
$$a^{\frac{1}{x_2}}(\ln a-x_2)=\cdots=a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a-x_n)$$

可得出 $x_1=x_2=\cdots=x_n=q$,则$(q,q,\cdots,q)$为原函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$可能的极值点,且仅有这一个极值点。由 $q^n=1$可得 $q=1$,故$(1,1,\cdots,1)$为函数的极值点,此时极值为0。事实上,假设函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$还有其他的极值点,设为$(x_1',x_2',\cdots,x_{n-1}')$,则由多元函数极值存在的必要条件可知,在这一点必有 $x_1'=x_2'=\cdots=x_{n-1}'=1$式成立,与之前单调函数同一函数值对应唯一自变量矛盾。故函数只有点$(1,1,\cdots,1)$这一个极值点。即此时原函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=x_1a^{\frac{1}{x_1}}+x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\cdots+x_{n-1}a^{\frac{1}{x_{n-1}}}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}-na$$

取得惟一极值,且极值为0。即当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$时,原方程的解是

(下转第18页)

第4步 $f:(L,\mathcal{F}_i)\to(L,\mathcal{F})$是结构渗透 $f: L_T\to L$的终提升。对于任一 A—对象(L_0, $\mathcal{F}_0$)和任一保并映射 $g: L\to L_0$,设 $g\circ f$有提升,则 $g\circ f$是(L, $\mathcal{F}_i$)→(L_0, $\mathcal{F}_0$)的保并连续映射。对任意的 $A\in\mathcal{F}_0$, $(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))\in\mathcal{F}_i(\forall i\in I)$,这说明 $g^{-1}(A)\in\mathcal{F}$,从而 g是保并连续映射,这说明 $g: L\to L_0$有提升。

第5步 $f:(L,\mathcal{F}_i)\to(L,\mathcal{F})$是惟一的终提升。假设 $l:(L,\mathcal{F}_i)\to(L,\mathcal{F}')$是另一个终提升,令

$(L_0,\mathcal{F}_0)=(L,\mathcal{F}')$, $g=i_L$,

则 $U(l)=f$,即 $i_L\circ f=f$有提升 l,所以 $i_L: L\to L$有提升 $\bar{i}:(L,\mathcal{F})\to(L,\mathcal{F}')$,又由于 $\bar{i}$是连续的,所以 $\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$,同理 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}'$,综上所述, $\mathcal{F}=\mathcal{F}'$。又

$U(l)=f=U(f)$,

所以 $l=f$。

第6步 WTML不是 topological construct(同理可证 TML也不是 topological construct)。若不然,取集合 $L=\{x,y\}$(其中 $x\neq y$), WTML—对象(L_1, $\mathcal{F}_1$)=($\{0,1\}$, $\{0,1\}$)(其中 $0<1$)及映射 $f: L\to L_1$,其中 $f(x)=f(y)=0$。则可设($\leqslant$, $\mathcal{F}$)是 L上相应的初始 WTML—结构。由于(L, $\leqslant$)是完备格,不妨设 $x<y$。这时取 WTML—对象(L_0, $\mathcal{F}_0$)=(L_1, $\mathcal{F}_1$)和满足 $g(0)=g(1)=y$的映射 $g: L_0\to L$。则由

$(f\circ g)(0)=(f\circ g)(1)=0$

可知 $f\circ g:(L_0,\mathcal{F}_0)\to(L_1,\mathcal{F}_1)$是 WTML—态射,但 $g:(L_0,\mathcal{F}_0)\to(L,\mathcal{F})$不是 WTML—态射(因 g不是保并映射)。这与($\leqslant$, $\mathcal{F}$)是 L上相应的初始 WTML—结构矛盾。

参考文献:

[1] 陈园园,路娟,李生刚.预拓扑分子格以及它们之间的开映射和闭映射[J].纺织高校基础学报, 2005, 18(3): 229-232.

[2] 鲜路,李生刚.闭包系统的确定[J].山东大学学报:自然科学版, 2009, 44(6): 18-21.

[3] WANG Guo-jun. Theory of topological molecular lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 47: 351-376.

[4] 熊金城.点集拓扑讲义[M].北京:高等教育出版社, 1998.

[5] 郑崇友,樊磊,崔宏斌. Frame与连续格[M].北京:首都师范大学出版社, 2000: 67-69.

[6] ADAMEK J, HERRLICH H, STRECKER G E. Abstract and Concrete Categories[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990.

(编 辑 亢小玉)

(上接第 10页)

$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$。

当 $a<0$时,原方程(2)若要有解,则 x_1, x_2, …, x_{n-1}必为有理数,因为负数不能开无理数次方,故设 $x_i=\frac{p_i}{q_i}$, $(p_i,q_i)=1$,其中 $i=1,2,\cdots,n$。若要 $a^{\frac{q_i}{p_i}}$有意义,则 p_i必为奇数,故 $p_1p_2\cdots p_n$也为奇数,若存在 q_i为偶数,则由已知条件有 $\frac{q_1\cdots q_i\cdots q_n}{p_1\cdots p_i\cdots p_n}=1$,这与 p_i为奇数矛盾。所以 $q_1q_2\cdots q_n$也为奇数, q_i为奇数,所以有 $a^{\frac{1}{x_i}}=-|a|^{\frac{1}{x_i}}$,于是原方程可化为

$$n|a|=-na=-x_1a^{\frac{1}{x_1}}-\cdots-x_{n-1}a^{\frac{1}{x_{n-1}}}-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}a^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}=$$

$$x_1|a|^{\frac{1}{x_1}}+\cdots+x_{n-1}|a|^{\frac{1}{x_{n-1}}}+\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}|a|^{x_1x_2\cdots x_{n-1}}。$$

此时,由前面讨论的两种情况可知,方程(2)的解仍然是

$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$。

综上所述,可得出方程(2)的所有非负实数解为

$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=1$。

于是,完成了定理的证明。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] ZHANG Wen-peng. On an equation of Smarandache and its integer solutions[J]. Smarandache Notions, 2002, 13: 176-178.

[3] 张文鹏.初等数论[M].西安:陕西师范大学出版社, 2008: 166-168.

[4] 复旦大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社, 1983.

[5] 华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社, 1983.

[6] 刘燕妮.一个包含 Smarandache函数的方程[J].西北大学学报:自然科学版, 2007, 37(2): 197-198.

(编 辑 亢小玉)