DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2009.02.003
2009年3月　　渭南师范学院学报　　March 2009
第24卷 第2期　　Journal of Weinan Teachers University　　Vol.24 No.2

关于一个 Smarandache 函数及其均值

赵 教 练
(渭南师范学院 数学与信息科学系, 陕西 渭南 714000)

摘　要: 研究了一个 Smarandache 函数的均值计算, 给出其均值 $A(N, n)$ 的精确计算公式, 推广和补充了相关的结果.

关键词: Smarandache 函数; 数字平方倒数之和函数; 均值
中图分类号: O156.4　　文献标志码: A　　文章编号: 1009-5128(2009)02-0016-02
收稿日期: 2008-05-19
作者简介: 赵教练(1979-), 男, 陕西兴平人, 渭南师范学院数学与信息科学系教师, 西北大学数学系硕士研究生.

1　引言及结论

数论名著《Only Problems, Not Solutions》[1] 一书中第22个问题是研究十进制中数字之和数列的性质. 文[3]-[4] 分别讨论了 n 进制中数字函数均值的有关计算, 本文在此基础上讨论进制中数字平方倒数之和函数均值的计算, 并给出了一个精确的计算公式 $A(N, n)$.

定义 1[1]　设 $n(n\geq 2)$ 为一给定的正整数, 对任一正整数 m, 假定 m 在 n 进制中表示为:

$$m = a_1 n^{k_1} + a_2 n^{k_2} + \cdots + a_s n^{k_s}$$

其中 $1\leq a_i < n$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_s \geq 0$.

定义 $a(m, n) = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_s^2}$, 约定 $\varphi_r(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^r}$, 并记 $A(N, n) = \sum_{m<n} a(m, n)$ 为函数 $a(m, n)$ 的均值.

定理 1　设 $N = a_1 n^{k_1} + a_2 n^{k_2} + \cdots + a_s n^{k_s}$, 其中 $1\leq a_i \leq n-1$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_s \geq 0$, 则

$$A(N, n) = \sum_{i=1}^{s}\left(a_i k_i \varphi_2(n) + n\varphi_2\left(\frac{1}{a_i}\right) + n a_i \sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j^2}\right) n^{k_i - 1}.$$

2　引理及证明

引理 1　$A(n^k, n) = k n^{k-1}\varphi_2(n)$　　(1)

证明　当 $k = 1$ 时, 左边 $= A(m, n) = a(1, n) + a(2, n) + \cdots + a(n-1, n)$

$$= 1^2 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} = \varphi_2(n)$$

右边 $= \varphi_2(n)$, 左边 $=$ 右边, 命题成立.

假设 $k = p$ 时命题成立, 即　$A(n^p, n) = p n^{p-1}\varphi_2(n)$　　(2)

那么, 当 $k = p+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
A(n^{p+1}, n) &= \sum_{m<n^{p+1}} a(m, n) \\
&= \sum_{m<n^p} a(m, n) + \sum_{n^p\leq m<2n^p} a(m, n) + \cdots + \sum_{(n-1)n^p\leq m<n^{p+1}} a(m, n) \\
&= \sum_{m<n^p} a(m, n) + \sum_{0\leq m<n^p} a(m+n^p, n) + \cdots + \sum_{0\leq m<n^p} a(m+(n-1)n^p, n) \\
&= \sum_{m<n^p} a(m, n) + \sum_{0\leq m<n^p}\left[a(m, n) + 1^2\right] + \cdots + \sum_{0\leq m<n^p}\left[a(m, n) + \frac{1}{(n-1)^2}\right] \\
&= n\sum_{m<n^p} a(m, n) + \left[1^2 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}\right] n^p \\
&= nA(n^p, n) + \varphi_2(n) n^p
\end{aligned} \quad (3)$$

由(2)和(3)得, $A(n^{p+1}, n) = \sum_{m<n^{p+1}} a(m, n) = n(pn^{p-1}\varphi_2(n)) + \varphi_2(n) n^p = (p+1)\varphi_2(n) n^p$

所以，当 $k=p+1$ 时命题成立。由数学归纳法得，引理1成立。

引理 2[3]　$A(tn^k, n) = tkn^{k-1}\varphi_2(n) + \varphi(t)n^k$ 其中 t 为自然数。

证明　$$A(tn^k, n) = \sum_{m<tn^k} a(m, n) = \sum_{m<n^k} a(m, n) + \sum_{n^k\le m<2n^k} a(m, n) + \dots + \sum_{(t-1)n^k\le m<tn^k} a(m, n)$$

因为 $$\sum_{in^k\le m<(i+1)n^k} a(m, n) = \sum_{0\le m<n^k}\left(a(m, n)+\frac{1}{i^2}\right) = \sum_{m<n^k} a(m, n) + \frac{1}{i^2}n^k = A(n^k, n) + \frac{1}{i^2}n^k$$

故有，$$A(tn^k, n) = \sum_{m<tn^k} a(m, n) = t\sum_{m<n^p} a(m, n) + \left[1^2 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(t-1)^2}\right]n^k = tA(n^k, n) + \varphi_2(t)n^k \tag{4}$$

由(1)和(4)式得

$$A(tn^k, n) = tA(n^k, n) + n^k\varphi_2(t) = tkn^{k-1}\varphi_2(n) + n^k\varphi(t).$$

3　定理证明

证明　根据上述两个引理，有

$$\begin{aligned}
A(N, n) &= \sum_{m<N} a(m, n)\\
&= \sum_{m<a_1n^{k_1}} a(m, n) + \sum_{a_1n^{k_1}\le m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}} a(m, n) + \dots + \sum_{N-a_sn^{k_s}\le m<N} a(m, n)\\
&= \sum_{m<a_1n^{k_1}} a(m, n) + \sum_{0\le m<a_2n^{k_2}}\left[a(m, n)+\frac{1}{a_1^2}\right] + \dots + \sum_{0\le m<a_sn^{k_s}}\left[a(m, n)+\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{a_i^2}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{s} A(a_in^{k_i}, n) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j^2}a_in^{k_i}\\
&= \sum_{i=1}^{s}\left(a_ik_in^{k_i-1}\varphi_2(n) + n^{k_i}\varphi_2\left(\frac{1}{t}\right)\right) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j^2}a_in^{k_i}\\
&= \sum_{i=1}^{s}\left(a_ik_i\varphi_2(n) + n\varphi_2\left(\frac{1}{a_j}\right) + na_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j^2}\right)n^{k_i-1}.
\end{aligned}$$

参考文献：

[1] F. Smarandache. Only Problems, Not Solution[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 22-24.

[2] 潘承洞，潘承彪．初等数论[M]．北京：北京大学出版社，1998: 35-36.

[3] 李海龙，杨倩丽．关于进制及其有关计数函数[J]．纯粹数学与应用数学，2002, 18(3): 13-15.

[4] 杨倩丽，李海龙．关于进制数字之和函数均值的计算[J]．西北大学学报，2002, 32(4): 361-362.

[责任编辑　牛怀岗]

On the Smarandache Function and Its Mean Value

ZHAO Jiao-lian

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan 714000, China)

Abstract: The paper studies a new Smarandache function, obtains an exact mean value computing formula, extends and reinforces the related corollary.

Key words: base; function of digital square sum; mean value