第 15 卷第 1 期　　西安文理学院学报: 自然科学版　　Vol. 15 No. 1
2012 年 1 月　　Journal of Xi'an University of Arts & Science( Nat Sci Ed)　　Jan. 2012

文章编号:1008-5564(2012)01-0001-03

# 关于一类 Smarandache LCM 函数混合均值研究

黄　炜
( 宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘　要:利用初等方法及素数分布理论研究 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与函数 $F(k,n)$ 混合均值 $(SL^k(n)-F(k,n))^2$ 问题,并获得了一个有趣的渐近公式.

关键词:Smarandache LCM 函数; 加性函数; 均方值; 渐近公式
中图分类号:O156.4　　文献标识码:A

## On Hybrid Mean Value Distribution Involving Smarandache LCM Functions

HUANG Wei
(Department of Fundamentals, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, China)

**Abstract:** The main purpose of this paper is to study the mean value distribution properties of involving function $(SL^k(n)-F(k,n))^2$ of Smarandache LCM function $SL(n)$ and function $F(k,n)$ by means of the elementary methods and the theory of prime distribution. The study also results in a sharper asymptotic formulae.

**Key words:** Smarandache LCM function; additive function; Hybrid mean value; Asymptotic formulae

## 1　引言及结论

对于任意正整数 $n$,著名的 F. Smarandacl7e LCM 函数 $SL(n)$[1] 定义为最小的正整数 $k$,使得 $n$ 整除 $[1,2,3,\cdots,k]$,其中 $[1,2,3,\cdots,k]$ 表示 $1,2,3,\cdots,k$ 的最小公倍数. 例如 $SL(n)$ 的前几个值是 $SL(1)=1$,$SL(2)=2$,$SL(3)=3$,$SL(4)=4$,$SL(5)=5$,$SL(6)=3$,$SL(7)=7$,$SL(8)=8$,$SL(9)=9$,$SL(10)=5$,$SL(11)=11$,$SL(12)=4$,$SL(13)=13$,$SL(14)=7$,$SL(15)=5$,$SL(16)=16$,$\cdots$,由 $SL(n)$ 的定义我们容易推出当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 $n$ 的标准分解式,那么 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\}$ (1)

关于 $SL(n)$ 的性质有不少的学者[2-7] 进行了研究,取得了一系列有趣且十分重要的结果: 对于任意素数 $p$,$SL(p)=S(p)$,其中 $S(n)$ 为 F. Smarandache 函数,同时解决了当 $n=12$,或 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 时 $SL(n)=S(n)$,$S(n)\neq n$ 其中 $p>p_i^{\alpha_i}$,$i=1,2,3,\cdots,t$ 等等. 对于任意正整数 $n$,若它的标准分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,可加函数 $F(k,n)$ 定义为: $F(k,n)=\alpha_1\cdot p_1^k+\alpha_2\cdot p_2^k+\cdots+\alpha_r\cdot p_r^k=\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i\cdot p_i^k$,其中 $F(k,1)=0$ 把 $F(k,n)$ 称为 $n$ 加性算数函数,例如: $F(1,2)=2$,$F(1,3)=3$,$F(1,4)=4$,$F(1,5)=5$,$F(1,6)=5$,$F(1,7)=7$,$F(1,8)=6$,$F(1,9)=9$,$F(1,10)=7$,$\cdots$. 关于函数 $F(n)$ 的性质,不少学者进行了研究,

收稿日期: 2011-07-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071194); 陕西省教育厅自然科学基金资助项目(09JK432).
作者简介: 黄　炜(1961— ),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院基础部教授,硕士. 研究方向: 解析数论.

获得了一些有趣的结果[2-6].

本文用初等方法,结合素数函数 $\pi(x)$ 的解析性质,研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 加性函数混合均值 $(SL^k(n)-F(k,n))^2$,并给出了两个有趣的渐近公式,即就是证明以下结论:

**定理 1** 设 $N$ 是任意给定的自然数,$x\geqslant 1$,有如下的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(SL^k(n)-F(k,n))^2=x^{k+1}\sum_{i=1}^{N}\frac{f_i}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{N+2}x}\right)$$

$f_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算常数且 $f_1=\frac{\pi^2}{6}$.

## 2 一个简单引理

**引理 1** 对于任何实数 $x>1$,有渐近公式

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant n}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $\pi(x)$ 表示不超过 $x$ 的所有素数 $p$ 的个数,$a_i=(i-1)!$,$(i=1,2,\cdots,k)$. 证明可参阅文[3].

## 3 定理的证明

对于任意的 $n\geqslant 1$,把区间 $(1,x]$ 的所有正整数 $n$ 分成如下四个部分:

$A$ 是 $(1,x]$ 中: 恰好有一个素因子 $p$ 满足 $n=mp$,$p>\sqrt[3]{n}$ 使得 $m$ 的所有素因子 $q$ 满足 $q<\sqrt[3]{n}$ 的集合;

$B$ 是 $(1,x]$ 中: 有一个素因子 $p$ 满足 $n=mp^2$,$p>\sqrt[3]{n}$ 的整数 $n$ 的集合;

$C$ 是 $(1,x]$ 中: 有两个素因子 $p_1,p_2$ 满足 $n=mp_1p_2$,$p_2>p_1>\sqrt[3]{n}>m$ 的 $p_1,p_2$、$m$ 两两互素的整数 $n$ 的集合;

$D$ 是 $(1,x]$ 中满足所有的素因子 $p$,满足 $p\leqslant\sqrt[3]{n}$ 的整数 $n$ 的集合. 由 $A,B,C,D$ 的定义显然有

$$\sum_{n\leqslant x}(SL^k(n)-F(k,n))^2=\sum_{n\in A}(SL^k(n)-F(k,n))^2+\sum_{n\in B}(SL^k(n)-F(k,n))^2+\sum_{n\in C}(SL^k(n)-F(k,n))^2+\sum_{n\in D}(SL^k(n)-F(k,n))^2$$

下面逐一计算:

(i) 当 $n\in A$ 时,$n=mp$ 且 $m$ 的所有素因子 $q$ 满足 $q<\sqrt[3]{n}$,而 $F(k,n)$ 是完全可加函数,故有: $p(n)\leqslant F(1,n)$,$F(k,n)\leqslant n^{\frac{k}{3}}\ln n$. 再由引理 1 有估计式:

$$\sum_{n\in A}(SL^k(n)-F(k,n))^2=\sum_{\substack{mp\leqslant x\\(mp)\in A}}(SL^k(mp)-F(k,mp))^2=\sum_{\substack{mp\leqslant x\\(mp)\in A}}(p^k-p^k-F(k,m))^2=$$

$$\sum_{\substack{mp\leqslant x\\(mp)\in A}}F^2(k,m)=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}(mp)^{\frac{2}{3}}\ln^2(mp)\ll(\ln x)^2\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}m^{\frac{2}{3}}\sum_{m<p\leqslant\frac{x}{m}}p^{\frac{2}{3}}\ll(\ln x)^2\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}m^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{5}{3}}\frac{1}{\ln\frac{x}{m}}\leqslant x^{\frac{5}{3}}\ln^2 x$$

(ii) 当 $n\in B$ 时,此时有 $n=mp^2$,注意到: $F(k,mp^2)=F(k,m)+2F(k,p)=F(k,m)+2p^k$,$p>\sqrt[3]{n}>m$,$p$ 为素数,从而有

$$\sum_{n\in B}(SL^k(n)-F(k,n))^2=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\m<p\\\sqrt[3]{x}<p<\sqrt{x}}}(p^k-z^k-F(k,m))^2=\sum_{m<\sqrt[3]{x}}\sum_{m<p<\sqrt{\frac{x}{m}}}(F(k,m)+p^k)^2\ll$$

$$\sum_{m<\sqrt[3]{x}}\sum_{k<p<\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{2k}\ll\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2k}\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}\ll\frac{x^{\frac{2k+1}{2}}}{\ln x}$$

(iii) 当 $n\in C$ 时,此时有 $n=kp_1p_2$,$p_2>p_1>\sqrt[3]{n}>m$,如果 $k<p_1<\sqrt[3]{n}$ 这属于(i)的估计情况,如果 $m<p_1<p_2<\sqrt[3]{n}$ 这属于(ii)的估计情况,从而由引理 1 及 Abel 求和公式可得

$$\sum_{n\in C}(p^k-F(k,n))^2=\sum_{\substack{mp_1p_2\leqslant x\\m<p_1<p_2}}(p_2^k-F(k,p_1p_2m))^2=\sum_{\substack{mp_1p_2\leqslant x\\m<p_1<p_2}}(p_2^k-(F(k,m)+p_1^k+p_2^k))^2+$$

$$O\left(x^{\frac{2k+3}{3}}\ln^2 x\right)=\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{m<p_2<\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{m<p_1<\frac{x}{mp_2}}\left(F^2(k,m)+2p_1^kF(m)+p_1^{2k}\right)+O\left(x^{\frac{2k+3}{3}}\ln^2 x\right)=$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{m<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p<\frac{x}{mp_1}}p_1^{2k}+O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{m<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p<\frac{x}{mp_1}}mp_1^k\right)+O\left(x^{\frac{2k+3}{3}}\ln^2 x\right)=$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{m<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{m<p<\frac{x}{mp_1}}p_1^{2k}=\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{m<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}p_1^{2k}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i x}{mp_1\ln^i\frac{x}{mp_1}}+O\left(\frac{x}{mp_1\ln^{N+1}x}\right)\right)=$$

$$x\sum_{i=1}^{N}\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{m<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\frac{a_ip_1^{2k-1}}{m\ln^i\frac{x}{mp_1}}+O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\frac{p_1^{k+1}}{\ln^{N+1}p_1}\right)=$$

$$x\sum_{i=1}^{N}\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{a_i}{m\ln^{i+1}x}\left(\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2k-1}\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)-(2k-1)\int_2^{\sqrt{\frac{x}{m}}}\pi(y)\,y^{2k-2}dy\right)+O\left(\frac{2^Nx^{k+1}}{\ln^{N+2}x}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{c_ix^{k+1}}{m^{k+1}\ln^i x}+O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\frac{p_1^{k+1}}{\ln^{N+1}p_1}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{c_ix^{k+1}}{\ln^{i+1}x}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+1}}-\sum_{k\geqslant\sqrt[3]{x}}\frac{1}{m^{k+1}}\right)+O\left(\frac{2^Nx^{k+1}}{\ln^{N+2}x}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d_i\cdot x^{k+1}}{\ln^{i+1}x}+O\left(\frac{2^Nx^{k+1}}{\ln^{N+2}x}\right)$$

其中 $d_i=\xi(k+1)c_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是不依赖任何常数的可计算常数. $\xi(s)$ 为 Riemann Zeta－函数.

$$\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{m<p<\frac{x}{mp_1}}mp_1^k\ll\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}mp_1^k\frac{x}{mp_1\ln x}\ll\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{x}{\ln x}\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{k-1}\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln x}\ll\frac{x^{\frac{k+2}{2}}}{\ln^2 x}$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p_1<\sqrt{\frac{x}{k}}}\frac{p_1^k}{\ln^{N+1}p_1}\ll\sum_{k\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{k\frac{k+1}{2}\ln^{N+2}x}\ll\frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{\ln^{N+2}x}\ll\frac{x^{k+1}}{\ln^{N+2}x}$$

于是有

$$\sum_{n\in A}\left(SL^k(n)-F(k,n)\right)^2=x^{k+1}\sum_{i=1}^{N}\frac{f_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{N+1}x}\right),\ f_i(i=1,2,\cdots,k)\text{ 是可计算常数.}$$

(iv) 当 $n\in D$ 时,此时 $p\leqslant\sqrt[3]{n}$ 及 $P(n)\leqslant F(k,n)$, $F(k,n)\leqslant\sqrt[3]{n^k}\ln n$ 可类似的得到

$$\left(SL^k(n)-F(k,n)\right)^2\ll\sum_{n\leqslant x}n^{\frac{2k}{3}}\ln^2 n\ll x^{\frac{2k+3}{3}}\ln^2 x$$

结合(i)、(ii)、(iii)、(iv)立即得到

$$\sum_{n\in A}\left(SL^k(n)-F(k,n)\right)^2=x^{k+1}\sum_{i=1}^{N}\frac{f_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{N+1}x}\right),\ f_i(i=1,2,\cdots,k)\text{,是可计算常数. 证毕.}$$

## 参 考 文 献


[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] SANDOR J. On certain ineqvialities involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 75－80.

[3] LE Mao-hua. An equation concerning Smarandache LCM function [J]. Notions Journal, 2004, 23: 186－188.

[4] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差问题 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 71－74.

[5] 刘红艳. 一个新的算术函数及其值分布 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2009, 39(1): 6－8.

[6] 吕国亮. 关于 Smarandache LCI(n) 函数与除数函数的混合均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 315－318.

[7] PAN C D, PAN C B. Foundation of analytic number theory [M]. Beijing: Science Press, 1997.


[责任编辑　王新奇]