DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2012.01.028

第 25 卷第 1 期 纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报 Vol. 25, No. 1
2012 年 3 月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES March, 2012

文章编号:1006-8341(2012)01-0071-04

关于三角数的 Smarandache 连续数列

韩彬玲

(西安文理学院 教育学院,陕西 西安 710001)

摘要:一个自然数 n 称为三角数,如果 $n=m(m+1)/2$,其中 m 为任意正整数. 三角数的 Smarandache 连续数列 $E=\{T_n\}=\{1,13,136,13\ 610,1\ 361\ 015,136\ 101\ 521,13\ 610\ 152\ 128,\cdots\}$,即 T_n 就是由前 n 个三角数相继连接起来构成的正整数. 利用初等方法以及等比级数的性质研究三角数的 Smarandache 连续数列 E 的算术性质,并给出其对数倒数形成的无穷级数的敛散性的一个判别准则.

关键词:三角数的 Smarandache 连续数列; 无穷级数; 收敛性;初等方法

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

1 引言及结论

美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache 教授在文献[1-2]中介绍了不少数列和未解决的问题,其中之一数列称之为 Smarandache 连续数列 $\{S_n\}$,它所包含的元素 S_n 定义为 S_n 是由前 n 个自然数相继连接起来构成的正整数,或者 $S_n=\{1, 12, 123, 1\ 234, 12\ 345, 123\ 456, 1\ 234\ 567, \cdots\}$. 例如 $S_9=123\ 456\ 789$, $S_{11}=1\ 234\ 567\ 891\ 011$, $S_{16}=12\ 345\ 678\ 910\ 111\ 213\ 141\ 516$, … 同时,F. Smarandache 教授还建议研究该数列的各种算术性质. 关于这一问题,至今似乎没有人研究,至少没有在现有的文献中看到任何有关的结果. 文献[3]将 Smarandache 连续数列的定义推广到了三角数上,也就是他引入了三角数的 Smarandache 连续数列. 一个自然数 n 称为三角数,如果 n 可以表示成 $m(m+1)/2$,其中 m 为正整数. 而三角数的 Smarandache 连续数列 $E=\{T_n\}=\{1,13,136,13\ 610,1\ 361\ 015,136\ 101\ 521,13\ 610\ 152\ 128,\cdots\}$. 即就是 $T_n=13\ 610\cdots n(n+1)/2$ 是由前 n 个三角数相继连接起来构成的正整数. 例如: $T_8=1\ 361\ 015\ 212\ 836$, $T_{10}=13\ 610\ 152\ 128\ 364\ 555$, $T_{12}=136\ 101\ 521\ 283\ 645\ 556\ 678$, … 在文献[3]中 S. S. Gupta 也提出了下面 2 个问题:

(ⅰ) 在数列 $\{T_n\}$ 中有多少项是素数.

(ⅱ) 在数列 $\{T_n\}$ 中有多少项是三角数.

当 $1\leqslant n\leqslant 1\ 000$ 时,只有 $T_2=13$ 和 $T_6=136\ 101\ 521$ 等 2 个素数;除了平凡的 $T_1=1$ 外,也只有 $T_3=136$ 是三角数. 所以,以上 2 个问题中的数虽然存在,但是非常稀少. 很自然,在三角数的 Smarandache 连续数列中,是否存在无穷多个素数或者三角数也是数论中 2 个有趣的问题.

收稿日期:2011-11-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194)

作者简介:韩彬玲(1966-),女,陕西省彬县人,西安文理学院副教授. E-mail:521hannah@163.com

本文首次对这一数列的算术性质进行了研究,并利用初等方法以及等比级数的性质讨论了无穷级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln T_n)^{\alpha}}$ 的收敛性,证明了如下的结论:

定理1 设$\{T_n\}$表示由三角数构成的Smarandache连续数列,则无穷级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln T_n)^{\alpha}}$,当$\alpha>1$时是收敛的;当$\alpha\leqslant 1$时是发散的

定理2 设$\{T_n\}$表示由三角数构成的Smarandache连续数列,则 $\forall x\in\mathbf{R}, x>1$,有渐近公式

$$\sum_{1<n\leqslant x}\ln\ln T_n = x\ln x + x\ln\ln x + O(x).$$

显然作为这一问题的推广和延伸,可用类似的方法处理由三角数构成的Smarandache反连续数列$\{B_n\}=\{1,31,631,10\ 631,1\ 510\ 631,211\ 510\ 631,28\ 211\ 510\ 631,\cdots\}$,即$B_n$是由前$n$个三角数按照相反的次序连接起来的自然数.例如$B_{11}=6\ 655\ 453\ 628\ 211\ 510\ 631$,$B_{18}=17\ 115\ 313\ 612\ 010\ 591\ 786\ 655\ 453\ 628\ 211\ 510\ 631$.对这一数列,可以给出下面的结论:

定理3 设$\{B_n\}$是由三角数构成的Smarandache反连续数列,则无穷级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln B_n)^{\beta}}$,当$\beta>1$时是收敛的;当$\beta\leqslant 1$时是发散的.

定理4 设$\{B_n\}$表示由三角数构成的Smarandache反连续数列,则 $\forall x\in\mathbf{R}, x>1$,有渐近公式

$$\sum_{1<n\leqslant x}\ln\ln B_n = x\ln x + x\ln\ln x + O(x).$$

2 主要定理的证明

利用初等方法、等比级数的性质以及三角数的Smarandache连续数列$\{T_n\}$的结构来完成定理的证明.文中所使用的初等数论知识可参见文献[4-6],有关Smarandache问题的其他研究可参见文献[7-9].

2.1 定理1的证明

将数列$\{T_n\}$按照n的大小变化进行分类.显然在所有T_n中,T_{n+1}比T_n多一位数的T_n总共有3个数,即就是1,13,136.而在所有T_n中,T_{n+1}比T_n多二位数的T_n总共有10个数,即就是13 610,1 361 015,136 101 521,13 610 152 128,1 361 015 212 836,136 101 521 283 645,13 610 152 128 364 555,1 361 015 212 836 455 566,136 101 521 283 645 556 678,13 610 152 128 364 555 667 891.一般地,设在所有T_n中,T_{n+1}比T_n多m位数的T_n的个数总共有$K(m)$个,此时的n必须满足

$$10^{m-1}\leqslant n(n+1)/2<10^m. \tag{1}$$

解此不等式立刻推出

$$\frac{\sqrt{8\cdot 10^{m-1}+1}-1}{2}\leqslant n<\frac{\sqrt{8\cdot 10^{m}+1}-1}{2}. \tag{2}$$

由式(2)不难推出满足此不等式的n的个数$K(m)$为

$$\left[\frac{\sqrt{8\cdot 10^{m}+1}-\sqrt{8\cdot 10^{m-1}+1}}{2}\right]\leqslant K(m)\leqslant\left[\frac{\sqrt{8\cdot 10^{m}+1}-\sqrt{8\cdot 10^{m-1}+1}}{2}\right]+1. \tag{3}$$

设$S(m)=1\times 3+2\times 10+\cdots+m\cdot K(m)$,于是当$n$满足不等式(1)时,$T_n$一定满足不等式

$$10^{S(m)-1}\leqslant T_n<10^{S(m+1)-1}. \tag{4}$$

显然由式(2)容易推出渐近式

$$m=(2/\ln 10)\ln n+O(1). \tag{5}$$

由式(3)容易推出渐近式

$$\ln K(m)=(m/2)\ln 10+O(1). \tag{6}$$

由式(6)并注意到大O符号的定义,知道 $\exists M>0$,使得

$$(1/M)\cdot 10^{m/2}\leqslant K(m)<M\cdot 10^{m/2}. \tag{7}$$

于是,由式(7)可得$\frac{1}{M}\cdot\sum_{i=1}^{m}i\cdot 10^{i/2}\leqslant\sum_{i=1}^{m}i\cdot K(i)<M\cdot\sum_{i=1}^{m}i\cdot 10^{i/2}$,或者

$$\frac{1}{M}\cdot\left[\frac{m\cdot 10^{(m+1)/2}}{\sqrt{10}-1}-\frac{\sqrt{10}\cdot(10^{m/2}-1)}{(\sqrt{10}-1)^2}\right]\leqslant\sum_{i=1}^{m} i\cdot K(i)<M\cdot\left[\frac{m\cdot 10^{(m+1)/2}}{\sqrt{10}-1}-\frac{\sqrt{10}\cdot(10^{m/2}-1)}{(\sqrt{10}-1)^2}\right],$$

或者存在正常数 M_1，使得

$$\frac{1}{M_1}\cdot\frac{m\cdot 10^{(m+1)/2}}{\sqrt{10}-1}\leqslant S(m)<M_1\cdot\frac{m\cdot 10^{(m+1)/2}}{\sqrt{10}-1}. \tag{8}$$

对式(8) 取对数并整理可得

$$m=(2/\ln 10)\cdot(\ln S(m)-\ln\ln S(m))+O(1). \tag{9}$$

结合式(5) 及(9) 可得 $\ln n=\ln S(m)-\ln\ln S(m)+O(1)$，或者

$$\ln S(m)=\ln n+\ln\ln n+O(1). \tag{10}$$

由式(10) 及大 O 常数的定义可知，$\exists N>0$，使得 $(1/N)\cdot n\cdot\ln n\leqslant S(m)\leqslant N\cdot n\cdot\ln n$，或者

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{(n\cdot\ln n)^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{(S(m))^{\alpha}}\leqslant N\cdot\frac{1}{(n\cdot\ln n)^{\alpha}}\ . \tag{11}$$

此外，由式(4) 也可以推出 $S(m)\cdot\ln 10\leqslant\ln T_n<S(m+1)\cdot\ln 10$. 或者结合式(11) 可推出

$$\frac{1}{(n\cdot\ln n)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{((n+1)\cdot\ln(n+1))^{\alpha}}<\frac{1}{(\ln T_n)^{\alpha}}\leqslant\left(\frac{N}{\ln 10}\right)^{\alpha}\cdot\frac{1}{(n\cdot\ln n)^{\alpha}}. \tag{12}$$

对式(12) 两边求和可得

$$\frac{1}{(n\cdot\ln n)^{\alpha}}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{((n+1)\cdot\ln(n+1))^{\alpha}}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln T_n)^{\alpha}}\leqslant\left(\frac{N}{\ln 10}\right)^{\alpha}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\cdot\ln n)^{\alpha}}. \tag{13}$$

注意到无穷级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\cdot\ln n)^{\alpha}}$，当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散. 于是由正项级数的收敛性判别法以及式(13) 不难推出无穷级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln T_n)^{\alpha}}$，当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散. 于是证明了定理 1.

2.2　定理 2 的证明

由式(4) 及(10) 立刻推出渐近式

$$\ln\ln T_n=\ln n+\ln\ln n+O(1). \tag{14}$$

对式(14) 应用 Euler 求和公式可得

$$\sum_{1<n\leqslant x}\ln\ln T_n=\sum_{1<n\leqslant x}(\ln n+\ln\ln n)+O(x)=x\ln x+x\ln\ln x+O(x).$$

于是完成了定理 2 的证明.

参考文献：

[1]　SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 15.

[2]　SMARANDACHE F. Sequences of numbers involved in unsolved problems[M]. Phoenix: Hexis, 2006: 3.

[3]　GUPTA S S. Smarandache sequence of triangular numbers[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 366-368.

[4]　张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[5]　APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[6]　SHAPIRO H N. Introduction to the theory of numbers[M]. New York: John Wiley and Sons, 1983.

[7]　郭晓燕，袁霞. 关于 Smarandache 问题研究的新进展[M]. Phoenix: High American Press, 2010.

[8]　武楠. 关于 Smarandache 伪偶数序列[J]. 纺织高校基础科学学报，2008，21(3)：378-380.

[9]　郭艳春，路玉麟. 关于 Smarandache 素数可加补数列[J]. 纺织高校基础科学学报，2008，21(1)：128-130.

On the Smarandache consecutive sequence of triangular numbers

HAN Bin-ling

(Primary Education College, Xi'an University of Arts and Science, Xi'an 710001, China)

Abstract: A positive integer n is called triangular number, if there exists one positive integer m such that $n=m(m+1)/2$. And the F. Smarandache consecutive sequence of triangular numbers is defined as $E=\{T_n\}=\{1,13,136,13\ 610,1\ 361\ 015,136\ 101\ 521,13\ 610\ 152\ 128,\cdots\}$. That is, $T_n=1\ 361\ 015\cdots n(n+1)/2$. By using the elementary method and the properties of the geometric progression, the arithmetical properties of the Smarandache consecutive sequence of triangular numbers is studied, and the convergence of the series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln T_n)^{\alpha}}$ is discussed.

Key words: Smarandache consecutive sequence of triangular numbers; infinite series; convergence; elementary method

编辑、校对:黄燕萍