第 35 卷　第 5 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 35　No. 5
2014 年 9 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Sept. 2014

文章编号:1007－2985(2014)05－0010－03

关于伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的 2 个问题*

黄　炜

(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘　要:研究了 $\ln Z(n)$ 的均值分布性质,利用初等、解析方法,获得了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的性质,解决了 Felice Russo 提出的 2 个扩展极限的计算问题.

关键词:伪 Smarandache 函数;分布性质;极限;渐近公式

中图分类号: O156.4　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007－2985.2014.05.003

1　问题的提出

著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为 $Z(n)=\min\left\{m:n\left|\frac{m(m+1)}{2},m\in\mathbf{N}\right.\right\}$,其中 n 为任意正整数,该数列的前几项为 1,3,2,7,4,3,6,15,8,4,10,8,12,7,5,… 它是罗马尼亚著名数论专家 Jozsef Sandor 教授首次提出的,已有不少文献[1-8] 对 $Z(n)$ 的性质进行研究,获得了不少有益的结论,Felice Russo 教授也提出了一些有价值的问题.笔者对该类似问题进行了延拓,然后采用数论中的解析方法、初等方法及数素的分解方法,对伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的复合函数 $\ln Z(n)$ 值的分布进行分析,最后研究了推广后的下面 2 个极限计算:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln k}}{n}$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Z(n)}{\sum\limits_{k\leqslant n}\ln Z(k)}$.即证明下面的结论:

定理 1　对于任意实数 $x\geqslant 2$,有渐近估计公式 $\sum\limits_{n\leqslant x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x)$.

定理 2　对于任意自然数 $n>1$,有渐近估计式 $\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln k}}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$,则有极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln k}}{n}=1.$$

定理 3　对于任意自然数 $n>1$,有渐近估计式 $\frac{Z(n)}{\sum\limits_{k\leqslant n}\ln Z(k)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$,则有极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z(n)}{\sum\limits_{k\leqslant n}\ln Z(k)}=0.$$

* 收稿日期:2014－02－20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅自然科学基金资助项目(09JK432)
作者简介:黄　炜(1961—),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院基础部教授,硕士,主要从事解析数论与特殊函数研究.

2 引理及其证明

引理 1[7] 对于任意的正整数 $n>1$,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式,如果 $\alpha_i>2(i=1,2,\cdots,n)$,那么称 n 为 square-full 数. 令 $A_2(x)$ 表示不超过 x 的 square-full 数的集合(也就是得若 $p\mid n$ 则有 $p^2\nmid n$),有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A_2(x)}}1=\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}x^{\frac{1}{2}}+\frac{\zeta\left(\frac{2}{3}\right)}{\zeta(2)}x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{6}}\exp\left(-C\log\frac{2}{5}x\,(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right)\right),$$

其中 C 为正的常数,$\zeta(s)$ 为柯西-黎曼 zeta 函数.

引理 1 的证明由参考文献[7]给出.

引理 2 设 $x\geqslant 1$ 为任意实数,p 为任意素数,k 为任意正整数,则有渐近公式 $\sum\limits_{\substack{pk\leqslant x\\ (p,k)=1}}\ln p=x\ln x+O(x)$.

证明 由文献[8]知素数定理可以用几个不同的形式表示,即有

$$\sum_{k\leqslant x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1),\sum_{k\leqslant x}\ln p=x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right),\sum_{k\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2}=D+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\tag{1}$$

其中 D 是可计算的正常数.

由素数定理可表示的几个不同形式的渐近公式(1),有

$$\sum_{\substack{pk\leqslant x\\ (p,k)=1}}\ln p=\sum_{pk\leqslant x}\ln p\sum_{k\leqslant\frac{x}{p}}1=\sum_{pk\leqslant x}\ln p\left(\frac{x}{p}-\frac{x}{p^2}+O(1)\right)=x\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}-x\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2}+O\left(\sum_{p\leqslant x}\ln p\right)=x\ln x+O(x).$$

引理 2 证毕.

引理 3 对任意正整数 n 和 k,有:(ⅰ)$1\leqslant Z(n)\leqslant 2n-1$,$Z(n)=2n-1$ 当且仅当 $n=2^k$ 其中 k 为非负整数;(ⅱ)$Z(n)=n-1$,$n=p^k$,其中 p 为大于 2 的素数;(ⅲ)$Z(n)\leqslant n-1$,其中 n 不能表达为 $n=2^k$ 的形式.

其证明见参考文献[4-5].

3 定理的证明

定理 1 的证明 令 $U(n)=\sum\limits_{n\leqslant x}\ln Z(n)$,先估计 $U(n)$ 的上界. 事实上,依据 $Z(n)$ 的定义,对任意一个正整数 $n>1$,由引理 3 有 $Z(n)\leqslant 2n-1$,立即可推出 $\ln Z(n)\leqslant\ln(2n-1)$ 成立,因此 $\sum\limits_{n\leqslant x}\ln Z(n)\leqslant\sum\limits_{n\leqslant x}\ln(2n-1)$. 由欧拉求和公式[9-10],得

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n)\leqslant\sum_{n\leqslant x}\ln(2n-1)=\int_1^x\ln(2t-1)\mathrm{d}t+\int_1^x((2t-1)-[2t-1])\frac{1}{2t-1}\mathrm{d}t+\ln 2x((2x-1)-[2x-1])\leqslant\int_1^x\ln(2t-1)\mathrm{d}t+\ln 2x=x\ln(2x-1)-x+1+\ln 2x=x\ln x+O(x).\tag{2}$$

接下来估计 $U(n)$ 的下界. 将区间 $[1,x]$ 中的整数分成如下 2 个集合 A 和 B:$A=\{m$ 是 square-full 数,且 $m\in[1,x]\}$ 表示 $[1,x]$;$B=\{m$ 是 square-full 数,且 $m\in[1,x]\}$. 于是有

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln Z(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\ln Z(n).\tag{3}$$

由集合 A 的定义及引理 1,有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln Z(n)\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln(2n-1)\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln(2x)=\ln(2x)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}1=\ln(2x)A_2(x)\ll\sqrt{x}\ln x.\tag{4}$$

现在估计和式在集合 B 上的渐近公式. 由 $Z(n)$ 的定义 $Z(n)=\min\left\{m:n\left|\frac{m(m+1)}{2},m\in\mathbf{N}\right.\right\}$,对集合 B,当 $n\in B$,n 为正整数,可推得至少存在一个素数 p 满足 $p\mid n$ 且 $p^2\nmid n$. 即可得出下面的渐近估计:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\ln Z(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ (n,p)=1}}\ln Z(np)\geqslant\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{n\leqslant\frac{x}{p}\\ (n,p)=1}}\ln(p-1)=\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{x}{p}-\frac{x}{p^2}+O(1)\right)\ln(p-1)=$$
$$x\ln x+O(x).\tag{5}$$

由(3),(4),(5)式,有

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n)\geqslant x\ln x+O(x).\tag{6}$$

由(2)和(6)式,有 $\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x)$.

定理1证毕.

定理2,3的证明 一方面,由定理1,有

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln k}}{n}\geqslant\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln n}}{n}\geqslant\frac{\sum_{k=2}^{n}\ln Z(k)}{n\ln n}=\frac{n\ln n+O(n)}{n\ln n}=1+\left(\frac{1}{\ln n}\right);\tag{7}$$

另一方面,由 $Z(n)$ 的定义,有

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln k}}{n}\leqslant\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}}{n}=\frac{n-1}{n}<1<1.\tag{8}$$

结合(7)和(8)式,有

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln k}}{n}=1+\left(\frac{1}{\ln n}\right).\tag{9}$$

最后研究推广后的2个极限. 特别地在(9)式中,当 $n\to\infty$ 时,有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln Z(k)}{\ln k}}{n}=1$. 这就完成了定理2的证明.

根据定理1及 $Z(n)$ 的定义,有

$$0\leqslant\frac{Z(n)}{\sum_{k\leqslant n}\ln Z(k)}\leqslant\frac{n}{n\ln n+O(n)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).\tag{10}$$

由(10)式,有 $\frac{Z(n)}{\sum_{k\leqslant n}\ln Z(k)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$. 这就完成了定理3的证明.

在定理3中取 $n\to\infty$ 时即可推出对应的极限.

参考文献:

[1] FELICE RUSSO. A Set of New Smarandache Function,Sequences and Conjectures in Number Theory[M]. USA:American Research Press,2000.

[2] GUNARTO H,MAJUMDAR A. A. K. On Numerical Values of $Z(n)$[A]. ZHANG Wenpeng. [Eds.],Smaramtache on Number Theory and Smarandache Notions:Proceedings of the Fifth Inter National Conference on Number Theory and Smarandache Notions [C]. America:Hexis,2009:74-77.

[3] DAVID GORSKI. The Pseudo Smarandache Function [J]. Smarandache Notions Journa,2002,13:140-149.

[4] ALEKSANDAR IVIC. On a Problem of Erdos Involving the Largest Prime Factor of n[J]. M. Math. ,2005,145:35-46.

[5] 马 荣. Smarandache 问题研究[M]. America:Hexis,2012:449-451.

[6] 黄 炜,刘志峰. 关于减法补数复合函数的均值估计[J]. 西华大学学报:自然科学版,2014,32(1):48-51.

(下转第50页)

Isolation and Plant Growth-Promoting Ability of ACC Deaminase-Containing Bacteria from Rhizosphere of *Gynostemma Pentaphyllum* Makino

SONG Jinqiu, NAZIERBIEKE Wulumuhan, ZHANG ti, BORRATHYBAY Entomack

(College of Biology and Environmental Sciences, Jishou University, Jishou 416000, Hunan China)

Abstract: A total of 9 bacterial strains were isolated from rhizosphere of *Gynostemma pentaphyllum* through enrichment on 1-aminocyclopropane-1-carboxylate (ACC) as a sole nitrogen source. ACC deaminase assay showed that all isolates differed in their potential for ACC deaminse activity, among which 3 strains were positive for siderosphere by chrome azurol S (CAS) assay. Inoculation of rice seedlings with 7 ACC deaminase-containing strains had significant effect on root elongation and root fresh weight, among which the strain JDG127 caused 1.6-fold increase in root length and root fresh weight over uninoculated control. Based on the physiological and biochemical characteristics in combination with 16S rRNA gene sequences analysis, the 9 ACC deaminase- containing strains were identified as *Stenotrophomonas* (1 strain), *Paenibacillus* (1 strain), *Bacillus* (1 strain), *Enterobacter* (2 strains) and *Acinetobacter* (4 strains). The results indicated that the siderosphere producing ability of rhizobacteria may be correlated with their plant growth-promoting ability when compared to their ACC-deaminase activity.

Key words: *Gynostemma pentaphyllum*; rhizobacteria; ACC deaminase; growth-promoting ability

(责任编辑 陈炳权)

(上接第 12 页)

[7] 乐茂华. 两个关于伪 Smarandache 函数的方程[J]. 吉林化工学院学报, 2004, 21(4): 103－104.

[8] 关文吉, 郑亚妮. 关于伪 Smarandache 函数的一个方程[J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(2): 151－153.

[9] TOM M APOSTOL. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer Verlag, 1976.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 解析函数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 98.

On Two Questions of the Pseudo Smarandache Function $Z(n)$

HUANG Wei

(Basic Department, Baoji Vocational Technology College, Baoji 721013, Shaanxi China)

Abstract: The arithmetical properties of $\ln Z(n)$ is studied by the elementary methods and analytic methods, the properties of pseudo Smarandache function $Z(n)$ are therefore obtained, and thus the two computational problems of limit extension proposed by Felice Russo are solved.

Key words: pseudo Smarandache function; distribution properties; limit; asymptotic formula

(责任编辑 向阳洁)