DOI: 10.13876/J.cnki.ydnse.2015.02.046

关于伪 Smarandache 函数与除数函数的混合均值

郝虹斐,高　丽,鲁伟阳

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要: 利用初等方法和解析方法研究了一个包含伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与 Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 的混合均值,并得到一个较强的渐近式。

关键词: 伪 Smarandache 函数; 混合均值; Dirichlet 除数函数; 渐近公式

中图分类号: O156.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1004-602X(2015)02-0046-03

在《Only Problems Not Solutions》一书中,美籍罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 教授给出了著名的 Smarandache 函数,后来人们依据 Smarandache 函数提出伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的定义: 对任意的正整数 n,满足 $n \mid m(m+1)/2$ 的最小的正整数 m,即 $Z(n)=\min\{m: n \mid m(m+1)/2, m \in N\}$。根据函数 $Z(n)$ 的定义计算可得到: $Z(1)=1$, $Z(2)=3$, $Z(3)=2$, $Z(4)=7$, $Z(5)=4$, $Z(6)=3$, $Z(7)=6$, $Z(8)=15$, $Z(9)=8$, $Z(10)=4$, …。关于函数 $Z(n)$ 的均值方面的研究,受到了许多学者的关注及研究,并获得了不少有意义的结论[1,2]。例如: Lou Yuanbing[3] 研究的是一个包含伪 Smarandache 函数的对数函数的均值问题,并得到渐近公式:

$$\sum_{n\le x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x);$$

Cheng Lin[4] 也讨论了一个包含 $p(n)$ 与伪 Smarandache 函数的均值,得到渐近式:

$$\sum_{n\le x}\frac{p(n)}{Z(n)}=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right);$$

Zheng Yani[5] 证明了对任意的正整数 n 与足够大的 M,有 $\frac{Z(n+1)}{Z(n)}>M$ 和 $|Z(n+1)-Z(n)|>M$ 成立。

吴启斌[6] 讨论的是函数 $S(n)$ 与 $Z(n)$ 的复合函数 $S(Z(n))$ 的均值,得到渐近公式

$$\sum_{n\le x}S(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数,$S(n)$ 为著名的 Smarandache 函数。

本文作者研究了复合函数 $Sdf(Z(n))$ 的均值[7],得到一个较强的渐近式

$$\sum_{n\le x}Sdf(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数,$Sdf(n)$ 为著名的 Smarandache 双阶乘函数。

刘华[8] 则讨论了关于 $Z(n)$ 复合函数 $SL(Z(n))$ 的均值,同样得到一个有趣的渐近式

$$\sum_{n\le x}SL(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

收稿日期: 2015-01-07

基金项目: 陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019); 陕西省教育厅专项科研计划项目(12JK0893); 延安大学校级科研计划项目(YD2014-05); 延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介: 郝虹斐(1988—),女,陕西洛川人,延安大学在读硕士研究生。

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算常数，$SL(n)$ 为著名的 F. Smarandache LCM 函数。

本文利用初等及解析方法研究了一个包含伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与 Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 的混合均值问题，并得到下面定理中较强的渐近公式。

1　相关引理

引理1[9,10]　对任意的素数 $p\geqslant 3$ 及 $k\in N$，$Z(p^k)=p^k-1$。当 $p=2$ 时，则有

$Z(2^k)=2^{k+1}-1$。

引理2[9]　若 n 为任意合数，则 $Z(n)=\max\{Z(m):m\mid n\}$。

引理3[11]　设 $x>1$ 为实数，则有

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_ix}{\ln^ix}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数，并且 $c_1=1$。

引理4[11,12]　(Abel 等式)：对任一数论函数 $a(n)$，令 $A(x)=\sum_{n\leqslant x}a(n)$，其中当 $x<1$ 时，$A(x)=0$，假设 f 在区间 $[y,x]$ 上有连续导函数，其中 $0<y<x$，那么我们有

$$\sum_{y<n\leqslant x}a(n)f(n)=A(x)f(x)-A(y)f(y)-\int_y^xA(t)f'(t)\mathrm{d}t。$$

引理5[11]　当 $s>1$ 时，Riemam zeta 函数定义为：$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$。显然有 $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

引理6[11]　(1) 若 $x\geqslant 2$，则 $\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n}=\frac{1}{2}\ln^2x+2C\ln x+O(1)$，其中 C 是欧拉常数。

(2) 若 $x\geqslant 2$ 且 $\alpha>0,\alpha\neq 1$，则 $\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}\ln x}{1-\alpha}+\zeta(\alpha)^2+O(x^{1-\alpha})$。

2　主要定理及证明

定理　设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数，则对任意的实数 $x\geqslant 2$，有渐近式

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot d(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_ix^2}{\ln^ix}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数，即有 $d(n)=\sum_{d\mid n}1$，$a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算常数。

证明：事实上，在和式

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot d(n)\tag{1}$$

中，将所有整数 $1\leqslant n\leqslant x$ 分成两个集合 X,Y，其中集合 X 包含所有满足条件：存在素数 p 使得 $p\mid n$ 的正整数 n，并且 p 满足 $p>\sqrt{n}$；而集合 Y 为包含区间 $[1,x]$ 中不属于集合 X 的正整数。首先在集合 X 中讨论，由引理1及引理2可知：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in X}Z(n)\cdot d(n)&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n,\sqrt{n}<p}}Z(n)\cdot d(n)\\&=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}Z(np)\cdot d(np)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}2\cdot Z(p)\cdot d(p)\\&=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ p=2}}2\cdot Z(2)\cdot d(2)+\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p\\ p\geqslant 3}}2\cdot Z(p)\cdot d(p)\\&=\sum_{2\leqslant\sqrt{x}}+\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}2(p-1)\cdot d(n)\\&=\sum_{2\leqslant\sqrt{x}}12+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}2\cdot d(n)\cdot\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}(p-1)\\&=\sum_{2\leqslant\sqrt{x}}12+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}2\cdot d(n)\cdot\left(\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p-\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}1\right)\end{aligned}\tag{2}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$，由引理3与引理4可得

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p&=\frac{x}{n}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\cdot\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}\pi(y)\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_ix^2\ln^in}{n^2\ln^ix}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}1&=\pi\left(\frac{x}{n}\right)-\pi(n)\\&=\frac{x}{n\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_ix}{n\ln^ix}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

由引理6知，$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n}=\frac{1}{4}\ln^2x+C\ln x+O(1)$，$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n^2}=\frac{\pi^4}{36}-\frac{\ln x}{x}+O\left(\frac{1}{x}\right)$，并且有 $\sum_{2\leqslant\sqrt{x}}1=x^{\frac{1}{2}}+O(1)$。结合(2)、(3)、(4)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot d(n)&=\sum_{2\leqslant\sqrt{x}}12+\left(\frac{x^2}{\ln x}\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n^2}-\frac{2x}{\ln x}\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n}\right)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\left(\frac{2b_ix^2\ln^in}{n^2\ln^ix}-\frac{2c_ix}{n\ln^ix}\right)+\\&\quad O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_ix^2}{\ln^ix}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

现在讨论集合 Y 的情况。由伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的定义及性质可知，对 $\forall n\in Y$，当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，此时有两种情况：$Z(n)=$

$Z(p_r) = p_r - 1 < p_r \leqslant \sqrt{n}$ 或者 $Z(n) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{Z(p_i^{\alpha_i})\} = p_i^{\alpha_i} - 1 < p_i^{\alpha_i}$，其中 $\alpha_i \geqslant 2$。于是有

$$\sum_{n\in Y} Z(n) \cdot d(n) < \sum_{np\leqslant x} d(n) \cdot \sqrt{np} + \sum_{\substack{np^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}} (\alpha+1) \cdot d(n) \cdot p^{\alpha} \leqslant \sum_{n\leqslant x} d(n) \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \leqslant x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x \qquad (6)$$

其中用到渐近式 $\sum\limits_{n\leqslant x} d(n) = x \cdot \ln x + O(x)$。

综上可知，

$$\sum_{n\leqslant x} Z(n) \cdot d(n) = \sum_{n\in X} Z(n) \cdot d(n) + \sum_{n\in Y} Z(n) \cdot d(n) = \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $a_i (i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数。证毕。

参考文献:

[1] Kashihara Kenichiro. Comments and topics on smarandache notions and problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[2] Majumdar A A K. A note on the Pseudo – Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 1 – 25.

[3] Lou Yuanbing. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48 – 50.

[4] Cheng Lin. On the mean value of the Pseudo – Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 97 – 100.

[5] Zheng, Yani. On the Pseudo Smarandache function and its two conjectures [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 74 – 76.

[6] 吴启斌. 一个包含 Smarandache 函数的复合函数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(4): 463 – 466.

[7] 鲁伟阳, 高丽. 关于 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的混合均值 [J]. 江西科学, 2014, 32(2): 189 – 191 + 251.

[8] 刘华, 吕松涛. 一个包含 F. Smarandache 函数的复合函数 [J]. 江西科学, 2009, 27(3): 325 – 327.

[9] 马荣. Smarandache 函数及其相关问题研究 [M]. USA: The Educational Publisher, 2012.

[10] Richard Pinch. Some properties of the Pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 167 – 172.

[11] Apostol T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring – Verlag, 1976.

[12] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[责任编辑　毕　伟]

On the Hybrid Mean Value of the Pseudo – Smarandache Function and the Dirichlet Divisor Function

HAO Hong-fei, GAO LI, LU Wei-yang

(College of Mathematics and Computer Science, Yan´an University, Yan´an 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary method and analytic method to study the hybrid mean value problem invoving the Pseudo – Smarandache function and the Dirichlet divisor function, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: Pseudo – Smarandache function; hybrid mean value; dirichlet divisor function; asymptotic formula