关于伪 Smarandache函数的 d次剩余

赵杏花, 郭金保, 赵西卿
(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘 要: 主要目的是利用初等方法, 研究伪 Smarandache函数 $D(m)$是模 m的 d次剩余所要满足的条件, 并给出了这些条件的具体形式。

关键词: 伪 Smarandache函数; d次剩余; 初等方法
中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1004-602X(2010)04-0001-02

对任意正整数 m, 著名的伪 Smarandache函数 $D(m)$定义为最小的正整数 n使得 $m \left| \frac{n(n+1)}{2} \right.$. 即 $D(m)=\min\left\{ n: m \left| \frac{n(n+1)}{2}, n \in N^{*} \right. \right\}$.

其中 N^{*} 表示正整数集合。由 $D(m)$的定义知: $D(1)=1$, $D(2)=3$, $D(3)=2$, $D(4)=7$, $D(5)=4$, $D(6)=3$, $D(7)=6$, $D(8)=15$, $D(9)=8$, $D(10)=4$, $D(11)=10$, $D(12)=8$, $D(13)=12$, $D(14)=7$, $D(15)=5$, $D(16)=31$, $D(17)=16$, $D(18)=8$, …

伪 Smarandache函数是由 David Gorski在文[1]中提出的, 同时他也研究了 $D(m)$的一些初等性质, 获得了 $D(m)$的一系列特殊值的计算公式, 其中部分结果如下:

(1)如果 $p>2$是一个素数, 那么对任意正整数 α有 $D(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$;

(2)如果 $m=2^{k}$, 那么 $D(m)=2^{k+1}-1$;

(3)设 $p>2$是素数, α为任意正整数。

那么 $D(2p^{\alpha})=p^{\alpha}$, 如果 $p^{\alpha}\equiv 3 \pmod 4$; $D(2p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$, 如果 $p^{\alpha}\equiv 1 \pmod 4$.

其它有关伪 Smarandache函数的研究工作可参阅文[2-5]。杨明顺在文[2]中研究了伪 Smarandache函数 $D(m)$为 m的原根当且仅当 $m=2, 3, 4$. 受此启发, 本文的主要目的是利用初等方法, 研究伪 Smarandache函数 $D(m)$为模 m的 d次剩余所要满足的条件, 并给出了这些条件的具体形式。具体来说就是证明了下面的定理:

定理 设 $m\geqslant 2$是任意整数且存在原根, $d\geqslant 2$为整数, $(D(m), m)=1$, 其中 $D(m)$是伪 Smarandache函数, 若满足下列条件之一:

(i) $m=2$;

(ii) $m=4$且 $(d, 2)=1$;

(iii) $m=p^{\alpha}$, $p>2$为素数. 设 $p-1=2^{\alpha_1}p_1^{\alpha_2}$, p_1为奇数, $\alpha_1\geqslant 1$, $\alpha_2\geqslant 0$且均为整数, 若有 $(d, \phi(p^{\alpha}))=2^{\alpha_3}p_1^{\alpha_4}p^{\beta}$, $0\leqslant\alpha_3<\alpha_1$, $0\leqslant\alpha_4\leqslant\alpha_2$, $0\leqslant\beta\leqslant\alpha-1$且均为整数, $\varphi(m)$为 Euler函数。

则同余方程 $x^{d}\equiv D(m) \pmod m$有解, 即 $D(m)$是模 m的 d次剩余。

为了证明上述定理, 需要引入下面两个引理:

引理 1 设 $m\geqslant 2$, $(a, m)=1$, $n\geqslant 2$, 及模 m有原根 g, 那么, 同余方程 $x^{n}\equiv a \pmod m$有解的充要条件, 即 a是模 m的 n次剩余的充要条件是

$$(n, \varphi(m)) \mid \gamma(a),$$

这里 $\gamma(a)=\gamma_{m, g}(a)$是 a关于模 m的以 g为底的指标。

证明 参阅文献[6]第 5章第 4节定理 1。

引理 2 设模 m有原根, $n\geqslant 2$. 那么, a是模 m的次 n剩余, 即同余方程

收稿日期: 2010-10-09
作者简介: 赵杏花(1986-), 女, 陕西泾阳人, 延安大学在读硕士研究生。

$x^n \equiv a \pmod m$ $((a, m)=1)$有解的充要条件是

$$a^{\phi(m)/(n,\phi(m))} \equiv 1 \pmod m$$

成立，且有解时有 $(n, \phi(m))$ 个解。

证明　参阅文献[6]第5章第4节定理3。

利用上述引理，我们来证明定理。

(i) 若 $m=2$ 时，则由引理1知 $D(m)$ 是模 m 的 d 次剩余。

(ii) 若 $m=4$ 时，$D(4)=7$，则 $x^d \equiv D(m) \pmod m$ 变为 $x^d \equiv 7 \pmod 4$，$(4, 7)=1$. 当 $(d, 2)=1$ 时，$(d, \phi(4)) \mid \gamma(7)$. 于是，由引理1知 $D(m)$ 是模 m 的 d 次剩余。

(iii) 若 $m=p^\alpha$，$p>2$ 为素数. 由文献[1]知 $D(p^\alpha)=p^\alpha-1$，则

$x^d \equiv D(m) \pmod m$ 变为 $x^d \equiv p^\alpha - 1 \pmod{p^\alpha}$ 且 $(p^\alpha-1, p^\alpha)=1$.

设 $p-1=2^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2}$，$p_1$ 为奇数，$\alpha_1 \geqslant 1$，$\alpha_2 \geqslant 0$ 且均为整数，且

$(d, \phi(p^\alpha))=2^{\alpha_3} p_1^{\alpha_4} p^\beta$，$0 \leqslant \alpha_3 < \alpha_1$，$0 \leqslant \alpha_4 \leqslant \alpha_2$，$0 \leqslant \beta \leqslant \alpha-1$.

这里 α_3，α_4，β 均为整数，$\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$. 若 α_3，α_4，β 同时为零，则

$$(d, \phi(p^\alpha))=(d, p^{\alpha-1}(p-1))=1,$$

从而有

$$2 \,\Big|\, \frac{\phi(p^\alpha)}{(d, \phi(p^\alpha))}.$$

若 α_3，α_4，β 不同时为零，则

$$\frac{\phi(p^\alpha)}{(d, \phi(p^\alpha))}=\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{(d, p^{\alpha-1}(p-1))}=2^{\alpha_1-\alpha_3} p_1^{\alpha_2-\alpha_4} p^{\alpha-1-\beta},$$

从而有

$$2 \,\Big|\, \frac{\phi(p^\alpha)}{(d, \phi(p^\alpha))}.$$

下面来证当

$$2 \,\Big|\, \frac{\phi(p^\alpha)}{(d, \phi(p^\alpha))}$$

时结论成立。设

$$\frac{\phi(p^\alpha)}{(d, \phi(p^\alpha))}=n,$$ 则有

$$(p^\alpha-1)^n-1=\sum_{r=1}^{n} C_n^r p^{\alpha r}(-1)^{n-r}-1$$

$$=\sum_{r=1}^{n} C_n^r p^{\alpha r}(-1)^{n-r}+(-1)^n-1$$

$$=\sum_{r=1}^{n} C_n^r p^{\alpha r}(-1)^{n-r}.$$

所以

$$p^\alpha \,\Big|\, \left((p^\alpha-1)^n-1\right)，即$$

$$D(p^\alpha)^{\phi(p^\alpha)/(d, \phi(p^\alpha))} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

于是，由引理2知 $D(m)$ 是模 m 的 d 次剩余。

参考文献：

[1] David Gorski. The Pseudo Smarandache Function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140－149.

[2] 杨明顺. 关于伪 Smarandache 函数的一个问题 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(3): 449－451.

[3] 张爱玲. 关于伪 Smarandache 函数的一个方程及其正整数解 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2008, 38(4): 535－536.

[4] 乐茂华. 两个关于伪 Smarandache 函数的方程 [J]. 吉林化工学院学报, 2004, 21(4): 103－104.

[5] 关文吉, 郑亚妮. 关于伪 Smarandache 函数的一个方程 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(2): 151－153.

[6] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.

[责任编辑　贺小林]

Residue of d－th Degree Concerning the Pseudo Smarandache Function

ZHAO Xing－hua, GUO Jin－bao, ZHAO Xi－qing

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary method to study the conditions that pseudo Smarandache function D(m) is a residue of d－th degree of modulo m and give the concrete forms of these conditions.

Key words: the pseudo Smarandache function; residue of d－th degree; elementary method