第 32 卷 第 6 期 陕西科技大学学报 Vol. 32 No. 6
2014 年 12 月 Journal of Shaanxi University of Science & Technology Dec. 2014

* 文章编号:1000-5811(2014)06-0180-04

关于伪 Smarandache 函数的一个下界估计

鲁伟阳,高　丽,郝虹斐,王曦浛

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安　716000)

摘　要:利用初等方法及组合方法研究了伪 Smarandache 函数在 2^p+1 与 2^p-1 上的下界估计问题;给出了伪 Smarandache 函数在这些特殊值上的较强的下界估计;并证明了估计式 $Z(2^p+1)\geqslant 10p$,$Z(2^p-1)\geqslant 10p$,其中 $p\geqslant 17$ 为任意的素数.

关键词:伪 Smarandache 函数;初等方法;下界估计

中图法分类号:O156.4　　**文献标识码**: A

A lower bound estimate for the Pseudo-Smarandache function

LU Wei-yang, GAO Li, HAO Hong-fei, Wang Xi-han

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: Using the elementary method to study a lower bound estimate problem of the Pseudo Smarandache function at some special values. It is proved the estimates $Z(2^p+1)\geqslant 10p$, $Z(2^p-1)\geqslant 10p$, where $p\geqslant 17$ is any prime. The sharper lower bounds of the Pseudo-Smarandache function is given.

Key words: Pseudo-Smarandache function; elementary method; lower bound estimate

0　引言

对任意的正整数 n,著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$,即 $Z(n)=\min\{m: m\in N, n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}$. 从 $Z(n)$ 的定义,可以计算出 $Z(n)$ 的前几个值为:$Z(1)=1$,$Z(2)=3$,$Z(3)=2$,$Z(4)=7$,$Z(5)=4$,$Z(6)=3$,$Z(7)=6$,$Z(8)=15$,$Z(9)=8$,$Z(10)=4$,$Z(11)=10$,….

关于 $Z(n)$ 的初等性质,许多学者曾经研究过,并获得了不少有意义的结果[1-5]. 例如,Yuanbing Lou[3]研究了一个包含伪 Smarandache 函数的均值问题,得到了一个渐近式:

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x).$$

Lin Cheng[4]讨论了一个包含伪 Smarandache 函数的均值,得到了一个渐近式:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{p(n)}{Z(n)}=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right).$$

Yani Zheng[5]证明了对于任意的正整数 n 与足够大的 M,有 $\frac{Z(n+1)}{Z(n)}>M$ 和 $|Z(n+1)-Z(n)|>M$ 成立.

Le Maohua 在文献[6]中研究了 $S(2^{p-1}(2^p-1))$ 的下界估计问题,并给出估计式:

* 收稿日期:2014-10-16

基金项目:国家自然科学基金项目(10271093);陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);陕西省教育厅自然科学专项科研计划项目(14JK1840);延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZ2013-04);延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介:鲁伟阳(1989-),男,陕西兴平人,在读硕士研究生,研究方向:数论

$$S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 2p+1$$

其中，$S(n)$ 为著名的 Smarandache 函数.

苏娟丽[7]改进了文献[6]的结论，得到了更强的下界估计. 即对任意的素数 $p\geqslant 7$，有估计式：

$$S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 6p+1.$$

苏娟丽还在文献[8]中研究了 $S(2^p+1)$ 的下界估计问题，证明了对任意的素数 $p\geqslant 7$，有估计式

$$S(2^p+1)\geqslant 6p+1.$$

温田丁[9]证明了对任意的素数 $p\geqslant 7$，有估计式 $S(2^p-1)\geqslant 10p+1$，$S(2^p+1)\geqslant 10p+1$.

事实上，上述文献所提到的数列 $M_p=2^p-1$ 就是著名的梅森尼(Mersenne)数. 梅森尼曾经猜想对所有的素数 p，M_p 均为素数. 这一猜想后来被验证是错误的，因为 $M_{11}=2^{11}-1=23\times 89$ 是合数. 而数列 $2^{p-1}(2^p-1)$ 与一个古老的数论难题——偶完全数密切相关，其相关内容可参阅文献[9，10].

受文献[6-9]的启发，本文利用初等方法研究了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 在 2^p+1 与 2^p-1 上的下界估计问题，并得到了较强的下界估计.

1　相关引理

引理 1[11,12]　对任意的素数 $p\geqslant 3$ 及 $k\in N$，$Z(p^k)=p^k-1$. 当 $p=2$ 时，$Z(2^k)=2^{k+1}-1$.

引理 2[11]　若 n 为任意合数，则

$$Z(n)=\max\{Z(m):m\mid n\}.$$

引理 3[13]　设素数 $p>2$，$p\nmid d$，那么 d 是模 p 的二次剩余的充要条件是 $d^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$；$d$ 是模 p 的二次非剩余的充要条件是 $d^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$.

2　主要结论及其证明

定理　对任意的素数 $p\geqslant 17$，我们有估计式(Ⅰ)$Z(2^p+1)\geqslant 10p$；(Ⅱ)$Z(2^p-1)\geqslant 10p$.

证明：由引理 2 可知，对任意的素数 $p\mid n$，有 $Z(n)\geqslant Z(p)=p-1$，且 $(p-1)\mid Z(p^\alpha)$ 对所有的正整数 α 均成立.

2.1　关于定理中(Ⅰ)式的证明

因为 $2\equiv -1(\mathrm{mod}\ 3)$，$2^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，且对任意的奇素数 p，有 $2^p\equiv -1(\mathrm{mod}\ 3)$，即 $2^p+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$，这说明对任意的奇素数 p，2^p+1 都有素因子 3.

当 $p\geqslant 17$ 时，先证 2^p+1 不可能是 3 的 m 次幂($m\in N$). 假设 2^p+1 是 3 的 m 次幂，则有 $2^p+1=3^m$. 当 $m=2k+1$ 时，有 $1\equiv 2^p+1\equiv 3^m\equiv 3^{2k+1}\equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ 矛盾；当 $m=2k$ 时，$2^p=3^m-1=(3^k+1)(3^k-1)$. 又 $(3^k+1,3^k-1)=2$，可得 $3^k-1=2$，$k=1$，这与 $p\geqslant 17$ 矛盾. 因此，2^p+1 不可能是 3 的 m 次幂. 由此可知，2^p+1 至少含有一个大于 3 的素因子.

对任意的素数 $p\geqslant 17$，设 q 为 2^p+1 的任一大于 3 素因子，则有 $q\geqslant 5$. 由伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的性质可知：

$$Z(2^p+1)\geqslant q-1 \tag{1}$$

又 $q\mid 2^p+1$，则有 $2^p+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$，即 $2^p\equiv -1(\mathrm{mod}\ q)$. 此时，可设 m 为 2 模 q 的指标，则 $2^m\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. 由 $2^p\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$ 可得 $2^{2p}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$，所以由指标的性质[10,14]知：$m\mid 2p$. 于是有 $m=1,2,p,2p$，显然 $m\neq 1,2,p$，所以 $m=2p$. 又由指标的性质[10,14]可知：$m\mid \varphi(q)=q-1$，即 $q-1=m\cdot k=2p\cdot k$，亦即：

$$q=2kp+1,\ k=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

因此，2^p+1 可以分为以下 4 种情况：

(1)若 2^p+1 除 3 之外含有一个大于 3 的素因子 q. 此时有 4 种可能：$2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$ 或者 $2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta$ 或者 $2^p+1=3^\alpha\cdot(6p+1)^\beta$ 或者 $2^p+1=3^\alpha\cdot(8p+1)^\beta$.

如果 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta$ 成立，则当 $\beta\geqslant 5$ 时，有 $Z(2^p+1)\geqslant Z((2p+1)^\beta)\geqslant \beta\cdot[(2p+1)-1]\geqslant 5\cdot[(2p+1)-1]\geqslant 10p$.

当 $\beta=4$ 时，若 α 为偶数(设 $\alpha=2k$)，则 $2^p+1=3^{2k}\cdot(2p+1)^4$，即 2^p+1 为完全平方数. 设 $2^p+1=a^2$，则 $2^p=a^2-1=(a+1)(a-1)$. 然而 $(a+1,a-1)=2$，可知 $a-1=2$，即 $a=3$. 所以 $p=3$，这与 $p\geqslant 17$ 矛盾. 故 α 不可能是偶数；若 α 为奇数(设 $\alpha=2k+1$)，则 $2^p+1=3^{2k+1}\cdot(2p+1)^4$，由于 $1\equiv 2^p+1=3^{2k+1}\cdot(2p+1)^4\equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ 矛盾，所以 $2^p+1\neq 3^{2k+1}\cdot(2p+1)^2$，即 α 也不可能为奇数. 因此 $\beta=4$ 不可能成立.

当 $\beta=3$ 时，若 α 为偶数(设 $\alpha=2k$)，则 $2^p+1=3^{2k}\cdot(2p+1)^3$，$2^p=3^{2k}\cdot(2p+1)^3-1=3^{2k}\cdot(8p^3+12p^2+6p)+(3^k+1)\cdot(3^k-1)$.

因为 $4\mid 2^p$，$4\mid(3^k+1)\cdot(3^k-1)$，$4\nmid 3^{2k}\cdot(8p^3+12p^2+6p)$，所以 α 不可能是偶数.

若 α 为奇数(设 $\alpha=2k+1$)，则 $2^p+1=3^{2k+1}\cdot(2p+1)^3$. 当 $k=0$ 时，且 $p\geqslant 17$，有 $2^p+1>3\cdot(2p+1)^3$；当 $k\geqslant 1$ 时，$2^p+1\equiv 3^{2k+1}\cdot(2p+1)^3\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3^2)$，则有 $2^{2p}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3^2)$. 此时，可设 n 为 2 模 q 的指标，则 $2^n\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. 由指标的性质[10,14]知：$n\mid 2p$. 于是有 $n=1,2,p,2p$，显然 $n\neq$

1,2,p,所以 $n=2p$. 又由指标的性质[10,14] 可知:$n\mid\varphi(9)=6$,即 $2p\mid 6$,$p\mid 3$,这与 $p\geqslant 17$ 矛盾,所以 α 也不可能是奇数. 因此,$\beta=3$ 不可能成立. 同理可知 β 不可能为 1 和 2.

类似的可证:$2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(6p+1)^\beta$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(8p+1)^\beta$ 时结论成立.

(2)若 2^p+1 除 3 之外恰好含有两个大于 3 的不同的素因子. 由式(2) 可知,2^p+1 中不可能同时含有素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$(因为当素数 $p>3$ 时,$2p+1$ 和 $4p+1$ 中至少有一个能被 3 整除,所以它们不可能同时为素数). 同理,2^p+1 也不可能同时含有素因子 $4p+1$ 和 $8p+1$.

因此,由式(2)可设 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(8p+1)^\gamma$ 或 $2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$.

若 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 成立,则当 $\beta\geqslant 5$ 或 $\gamma\geqslant 2$ 时,有 $Z(2^p+1)\geqslant\beta[(2p+1)-1]\geqslant 10p$ 或 $Z(2^p+1)\geqslant\gamma[(6p+1)-1]\geqslant 10p$.

当 $\gamma=1$,$1\leqslant\beta\leqslant 4$ 时,则 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)$,此式两边同时取素数模 $2p+1$,则有 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)\equiv 0(\bmod(2p+1))$,即 $2^p\equiv -1(\bmod(2p+1))$. 又由引理3和前式可知:$2^{\frac{(2p+1)-1}{2}}\equiv 2^p\equiv -1(\bmod(2p+1))$,所以 2 是素数 $2p+1$ 的二次非剩余. 同理可知 2 是素数 $6p+1$ 的二次非剩余. 然而,当 $p=8k+3$ 时,$\left(\frac{2}{2p+1}\right)=(-1)^{\frac{(2p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{4k+2}=1$;当 $p=8k+1$ 时,$\left(\frac{2}{6p+1}\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{12k+2}=1$,这与 2 是素数 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次非剩余矛盾.

类似的可证:当 $p\geqslant 17$ 时,$2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(8p+1)^\gamma$ 与 $2^p+1=3^\alpha\cdot(4p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma$ 有结论 $Z(2^p+1)\geqslant 10p$ 成立.

(3)若 2^p+1 除 3 之外恰好含有三个大于 3 的不同的素因子. 若其中至少有一个素因子可以满足等式 $q=2kp+1$ 且 $k\geqslant 5$,显然有 $Z(2^p+1)\geqslant q-1\geqslant 2kp\geqslant 10p$ 成立. 若所有的素因子中的 $k\leqslant 4$,因为 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数,$4p+1$ 和 $8p+1$ 也不可能同时为素数,故可设:

$$2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)^\gamma\cdot(8p+1)^\delta,$$

当 $\beta\geqslant 5$ 或 $\gamma\geqslant 2$ 或 $\delta\geqslant 2$ 时,定理中(Ⅰ)显然成立.

不失一般性,此时可设 $2^p+1=3^\alpha\cdot(2p+1)^\beta\cdot(6p+1)\cdot(8p+1)$,其中 $1\leqslant\beta\leqslant 4$. 类似于上述 2.1 中(3) 的讨论可知,2 是素数 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次非剩余,然而当 $p=8k+3$ 时,$\left(\frac{2}{2p+1}\right)=(-1)^{\frac{(2p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{4k+2}=1$;当 $p=8k+1$ 时,$\left(\frac{2}{6p+1}\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{12k+2}=1$,这与 2 是素数 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次非剩余矛盾. 所以,当 2^p+1 除 3 之外恰好含有三个大于 3 的不同的素因子时,有 $Z(2^p+1)\geqslant 10p$ 成立.

(4)若 2^p+1 除 3 之外至少含有四个大于 3 的不同的素因子,由式(2) 可知,至少有一个素数满足 $q=2kp+1$ 且 $k\geqslant 5$(因为若 $k<5$,则有 $q=2p+1$,$4p+1$,$6p+1$,$8p+1$,然而 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数,$4p+1$ 和 $8p+1$ 也不可能同时为素数,所以 $k\geqslant 5$),此时有 $Z(2^p+1)\geqslant q-1\geqslant 2kp\geqslant 10p$ 显然成立.

综上所述,我们完成了定理中(Ⅰ)式的证明.

2.2 关于定理中(Ⅱ)式的证明

对任意的素数 $p\geqslant 17$,设 q 为 2^p-1 的任一大于 3 素因子,由伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的性质可知:

$$Z(2^p-1)\geqslant q-1. \tag{3}$$

类似于(Ⅰ)式证明可知式(2)成立. 显然,2^p-1 不可能是完全平方数(反证法:假设 2^p-1 是一个完全平方数,可设 $2^p-1=a^2$,即 $2^p=a^2+1$,$0\equiv 2^p\equiv a^2+1\equiv 2(\bmod 4)$ 矛盾),因此,2^p-1 可分为以下 5 种情况:

(1)若 2^p-1 为素数,则由 $p\geqslant 17$ 及 $Z(n)$ 的性质可知,$Z(2^p-1)\geqslant 2^p-2\geqslant 10p$ 成立.

(2)若 2^p-1 恰好为素数 q 的 m 次幂(其中 $m\geqslant 3$),即 $2^p-1=q^m$. 因为 2^p-1 不可能为完全平方数,所以 $m=3,5,7,\cdots$. 当 $m=3$ 时,则 $q=2kp+1$ 且 $k\geqslant 2$,有 $Z(2^p-1)\geqslant Z(q^3)=q^3-1>3(q-1)\geqslant 3[(4p+1)-1]>10p$ 成立. 而当 $p\geqslant 17$ 时,显然有 $2^p-1>(2p+1)^3$,因此 $2^p-1\neq(2p+1)^3$;当 $m\geqslant 5$ 时,由式(2) 和式(3) 可知 $Z(2^p-1)\geqslant q^m-1>m(q-1)\geqslant 5[(2p+1)-1]\geqslant 10p$ 成立.

(3)若 2^p-1 恰有两个不同的素因子. 2^p-1 不可能同时含有素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$,也不可能同时含有素因子 $4p+1$ 和 $8p+1$,也不可能同时含有

素因子 $2p+1$ 和 $6p+1$（反证法：若 $2^p-1=(2p+1)(6p+1)$，则由引理 3 和二次剩余的性质可知 2 是素数 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次剩余，然而当 $p=4k+1$ 时，$\left(\frac{2}{2p+1}\right)=(-1)^{\frac{(2p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}=(-1)^{2k+1}=-1$；当 $p=4k+3$ 时，$\left(\frac{2}{6p+1}\right)=(-1)^{\frac{(6p+1)^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{3p(3p+1)}{2}}=(-1)^{6k+5}=-1$，这与 2 是素数 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次剩余矛盾）. 因此，由式(2)可设 $2^p-1=(2p+1)^\alpha\cdot(8p+1)^\beta$ 或 $2^p-1=(4p+1)^\alpha\cdot(6p+1)^\beta$.

显然，当 $\alpha\geqslant5$ 或 $\beta\geqslant2$ 时，有 $Z(2^p-1)\geqslant\alpha[(2p+1)-1]\geqslant10p$ 或 $Z(2^p-1)\geqslant\beta[(6p+1)-1]\geqslant10p$.

当 $\beta=1,1\leqslant\alpha\leqslant4$ 时，有 $2^p-1=(2p+1)^\alpha\cdot(8p+1)$ 或 $2^p-1=(4p+1)^\alpha\cdot(6p+1)$.

若 $2^p-1=(2p+1)^\alpha\cdot(8p+1)$，当 $\alpha=4$ 时，因为 $-1\equiv2^p-1\equiv(2p+1)^4\cdot(8p+1)\equiv1 \pmod 8$ 矛盾，所以 $\alpha\neq4$；而当 $2^p-1=(4p+1)^3\cdot(6p+1)$ 时，$Z(2^p-1)\geqslant3[(4p+1)-1]>10p$ 显然成立；此时不妨设 $1\leqslant\alpha\leqslant3$，当 $p\geqslant17$ 时，有 $2^p-1>(2p+1)^3\cdot(8p+1)$ 与 $2^p-1>(4p+1)^2\cdot(6p+1)$，所以 $2^p-1=(2p+1)^3\cdot(8p+1)$ 和 $2^p-1=(4p+1)^2\cdot(6p+1)$ 不可能成立. 所以，当 2^p-1 恰有两个不同的素因子时，有 $Z(2^p-1)\geqslant10p$ 成立.

(4)若 2^p-1 恰有三个不同的素因子. 若其中至少有一个素因子可以满足等式 $q=2kp+1$ 且 $k\geqslant5$，显然有 $Z(2^p-1)\geqslant q-1\geqslant2kp\geqslant10p$ 成立. 若所有的素因子中的 $k\leqslant4$，因为 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数，$4p+1$ 和 $8p+1$ 也不可能同时为素数，故可设 $2^p-1=(2p+1)^\alpha\cdot(6p+1)^\beta\cdot(8p+1)^\gamma$，此时，当 $\alpha\geqslant5$ 或 $\beta\geqslant2$ 或 $\gamma\geqslant2$ 时，定理中(Ⅱ)式显然成立.

不失一般性，可设 $2^p-1=(2p+1)^\alpha\cdot(6p+1)\cdot(8p+1)$，其中 $1\leqslant\alpha\leqslant4$. 由引理 3 和二次剩余的性质可知，2 是素数 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次剩余，然而由上述 2.2 中(3)的讨论可知，2 是 $2p+1$ 和 $6p+1$ 的二次非剩余，故矛盾. 所以，当 2^p+1 恰有三个不同的素因子时，有 $Z(2^p-1)\geqslant10p$ 成立.

(5)若 2^p-1 至少有四个不同的素因子，同(Ⅰ)式证明过程中(4)及式(2)可知，至少有一个素数满足 $q=2kp+1$ 且 $k\geqslant5$，此时 $Z(2^p-1)\geqslant q-1\geqslant2kp\geqslant10p$ 显然成立.

综上所述，我们完成了定理中(Ⅱ)式的证明.

3　结束语

有关 Smarandache 函数的下界估计问题，已经有了不少的研究成果，然而对于伪 Smarandache 函数的相关内容却并没有涉及. 本文在文献[6-9]的基础上，利用初等及组合方法对伪 Smarandache 函数的下界估计问题进行了研究，拓宽了伪 Smarandache 函数在下界估计问题方面的研究.

参考文献

[1] Kashihara Kenichiro. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[2] A. A. K. Majumdar. A note on the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 1-25.

[3] Yuanbing Lou. On the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.

[4] Lin Cheng. On the mean value of the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 97-100.

[5] Yani Zheng. On the Pseudo-Smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 74-76.

[6] Le Maohua. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p-1))$[J]. Smarand-ache Notions Journal, 2001, 12(1/2/3): 217-218.

[7] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个下界估计[J]. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(1): 133-134

[8] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(4): 706-708.

[9] 温田丁. Smarandache 函数的一个下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(3): 413-416.

[10] Tom M. Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Spring Verlag, 1976.

[11] 马　荣. Smarandache 函数及其相关问题研究[M]. USA: The Educational Publisher, 2012.

[12] Richard Pinch. Some properties of the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 167-172.

[13] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[14] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.